

Осциллятор с сухим и вязким трением

Задачи для самостоятельного решения

Бутиков Е. И.

Аннотация. В данном пособии приведены контрольные вопросы, теоретические и экспериментальные задачи для самостоятельной работы к лабораторной работе «Осциллятор с сухим и вязким трением», а также материал для возможных индивидуальных заданий студентам (по указанию преподавателя).

Содержание

1	Затухание под действием сухого трения	2
2	Влияние вязкого трения	3
3	Приложение. Сводка основных формул	4

1 Затухание под действием сухого трения

1.2 Затухание под действием сухого трения при возбуждении колебаний начальным отклонением ротора из среднего положения. Чтобы отчетливее выявить роль сухого трения в затухании колебаний, выберите сравнительно большое значение угла φ_m , определяющего границы зоны застоя (скажем, от 15 до 20 градусов), и полное отсутствие вязкого трения. Такие условия сильно отличаются от ситуации, характерной для стрелочных измерительных приборов, которые конструируются так, чтобы зона застоя была бы по возможности более узкой, и в которых преднамеренно вносится вязкое трение, обеспечивающее сильное (близкое к критическому) затухание. В таком случае подвижная система прибора успокаивается за минимальное время, и, почти не совершая колебаний, останавливается очень близко к положению, в котором стрелка указывала бы на деление шкалы, соответствующее точному значению измеряемой величины. Здесь же мы намеренно выбираем условия так, чтобы в наибольшей мере выявить роль сухого трения.

(а) Что можно сказать о последовательности максимальных отклонений, если затухание вызвано исключительно сухим трением с идеализированной z -характеристикой? По какому закону происходит убывание максимальных отклонений? Как связаны между собой полуширина зоны застоя и разность последовательных максимальных отклонений в одну сторону?

(б) Пусть угол φ_m , определяющий полуширину зоны застоя, равен, скажем, 15 градусов, а начальное отклонение φ_0 составляет 160° при равной нулю начальной угловой скорости. Рассчитайте теоретически, в какой точке шкалы остановится стрелка после прекращения колебаний. Сколько полуэллипсов образуют фазовую траекторию этого движения, считая от начальной точки до точки полной остановки? Проверьте свои предсказания в моделирующем эксперименте на компьютере.

(в) Где на графике зависимости угловой скорости от времени расположены средние значения отрезков синусоид, описывающих колебания осциллятора на протяжении отдельных полуциклов между точками поворота? Обратите внимание на то, как эти отрезки синусоид переходят друг в друга и образуют непрерывный график затухающих колебаний.

(г) Обратите внимание на изломы графика зависимости угловой скорости от времени (эти изломы соответствуют моментам времени, в которые происходит изменение направления движения осциллятора). Какова причина этих изломов? Чем определяется разность углов наклона касательных к графику скорости справа и слева от этих точек?

1.3* Затухание колебаний под действием сухого трения после возбуждения осциллятора начальным толчком. Выберите начальные условия следующим образом: пусть начальное отклонение равно нулю, а начальная угловая скорость равна, скажем, $2\omega_0$ (где ω_0 — собственная частота осциллятора). Для полуширины зоны застоя примите, как и прежде, значение $\varphi_m = 15^\circ$.

(а) Рассчитайте теоретически максимальный отброс стрелки осциллятора.

(б) На какую точку шкалы укажет стрелка после полного прекращения колебаний? Сколько витков будет на полной фазовой траектории этих колебаний? Проверьте свой ответ в моделирующем эксперименте на компьютере.

1.4* Затухание колебаний под действием сухого трения при разных начальных условиях. Приняв прежнее значение $\varphi_m = 15^\circ$ для полуширины зоны застоя, рассчитайте угол, соответствующий максимальному отбросу стрелки, и окончательное ее положение на шкале после прекращения колебаний при более сложных начальных условиях:

(а) Начальный угол отклонения $\varphi(0) = 135^\circ$, начальная угловая скорость $\dot{\varphi}(0) = 1.5\omega_0$ (где ω_0 – собственная частота колебаний осциллятора).

(б) Начальный угол отклонения $\varphi(0) = -135^\circ$, начальная угловая скорость $\dot{\varphi}(0) = 1.5\omega_0$.

Проверьте полученные Вами теоретические значения в моделирующем эксперименте на компьютере.

1.5* Рассеяние механической энергии осциллятора в случае сухого трения.

(а) График зависимости полной механической энергии осциллятора от угла отклонения состоит из прямолинейных отрезков, соединяющих склоны параболической потенциальной ямы (этот график можно получить в окне компьютерной программы «Энергия от времени»). Объясните, почему.

(б) Рассчитайте полный угловой путь (в градусах), который пройдет маховик осциллятора до полной остановки (до прекращения колебаний) после возбуждения колебаний осциллятора начальным толчком $\dot{\varphi}(0) = 2\omega_0$ из средней точки мертвой зоны, где ω_0 – собственная частота осциллятора). Полуширина мертвой зоны $\varphi_m = 10^\circ$.

1.6 Колебания в случае узкой зоны застоя. Выберите малое значение угла φ_m , характеризующего полуширину зоны застоя (менее 5°), и задайте начальное угловое отклонение $\varphi(0)$, во много раз превосходящее ширину $2\varphi_m$ зоны застоя.

(а) Сколько циклов колебаний совершит маховик до полной остановки?

(б) Когда совершается большое число колебаний, графики отчетливо показывают линейную закономерность убывания амплитуды колебаний и эквидистантный характер витков фазовой диаграммы. Что можно сказать в этом случае о закономерности убывания со временем полной механической энергии осциллятора, усредненной по периоду колебаний?

2 Влияние вязкого трения

2.1* Переход главной роли в затухании от вязкого к сухому трению. Когда затухание колебаний обусловлено одновременно как сухим, так и вязким трением, представляет интерес выяснить изменение характера затухания, когда основной вклад в затухание переходит от вязкого трения к сухому. Пусть угол φ_m , определяющий полуширину зоны застоя, составляет около 1 градуса, и пусть добротность Q , определяющая интенсивность вязкого трения, составляет около 30. Пусть начальный угол отклонения равен 120° , а начальная угловая скорость равна нулю.

(а) Сухое или вязкое трение играет определяющую роль в затухании на начальной стадии колебаний?

(б) При каком значении амплитуды происходит изменение характера колебаний? Каким образом это изменение проявляется на графиках зависимости угла отклонения и угловой скорости

от времени? На фазовой траектории?

2.2* Совместное действие сухого и вязкого трения. Пусть границы зоны застоя находятся при $\varphi_m = 10^\circ$, и пусть добротность $Q = 5$. Пусть начальная угловая скорость $\dot{\varphi}(0) = 2\omega_0$, и пусть начальное отклонение равно нулю.

(а) Рассчитайте максимальный угол отклонения стрелки осциллятора для приведенных параметров и начальных условий. Проверьте свой ответ в эксперименте.

(б) Какой вид трения (сухое или вязкое) преобладает на начальном этапе затухания колебаний?

(в)** Пусть границы зоны застоя определяются углами $\varphi_m = 10^\circ$. Пусть добротность Q равна 3, начальное отклонение составляет 65° , начальная угловая скорость $-2\omega_0$. Рассчитайте максимальный угол отклонения стрелки с сторону, противоположную начальному отклонению. Проверьте свой ответ в эксперименте.

2.3 Сухое трение и критическое вязкое трение.

(а) Выберите значение добротности Q близкое к критическому значению 0.5, и исследуйте экспериментально характер затухания. Где в пределах зоны застоя наиболее вероятна остановка стрелки после прекращения колебаний, если добротность Q слегка превосходит критическое значение? Приведите физическое объяснение результатам своих наблюдений.

(б) Пусть вязкое трение характеризуется добротностью немного превышающей критическое значение, скажем, $Q = 0.51$. Осциллятор возбуждается начальным отклонением из положения равновесия. Оцените время (в единицах периода колебаний в отсутствие трения), которое пройдет до полного прекращения движения. Где произойдет полная остановка ротора? Проверьте результат своего расчета в моделирующем эксперименте.

(в) Где произойдет остановка стрелки, если добротность Q меньше, чем 0.5 (т. е. если система передемпфирована)? Зависит ли ответ от начальных условий?

3 Приложение. Сводка основных формул

Дифференциальное уравнение движения осциллятора с сухим трением:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi + \varphi_m) \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} > 0,$$

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \varphi_m) \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0,$$

где φ_m — угол, соответствующий границам мертвой зоны. Если наряду с сухим трением в системе имеется вязкое трение, в уравнении добавляется член, пропорциональный угловой скорости:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi + \varphi_m) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} > 0,$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi - \varphi_m) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0,$$

где ω_0 — частота собственных колебаний в отсутствие трения:

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}.$$

Постоянная затухания γ , характеризующая величину вязкого трения, связана с добротностью осциллятора соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Граничное значение амплитуды, разделяющее случаи преобладания сухого либо вязкого трения:

$$a = \frac{4\varphi_m}{\gamma T} = \frac{4}{\pi}\varphi_m Q \approx \varphi_m Q.$$