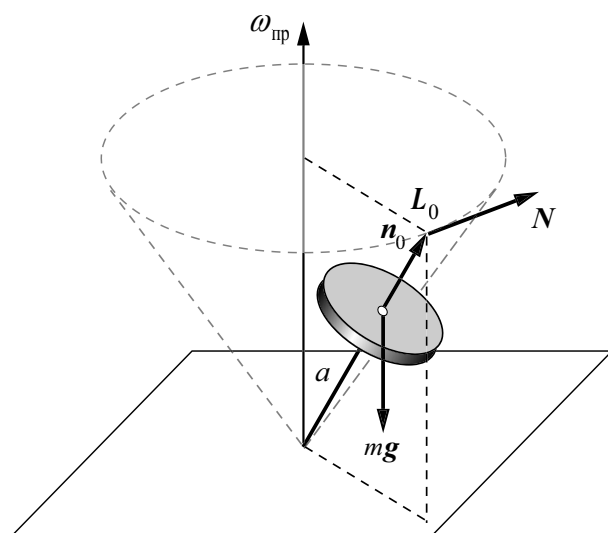


Санкт-Петербургский государственный университет  
Физический факультет

Бутиков Е. И.

# ДИНАМИКА ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Учебное пособие и методические материалы  
к комплексу моделирующих программ*



Санкт-Петербург

2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Свободное вращение твердого тела .....	2
Сведения из теории – главные оси инерции тела.....	2
Момент импульса и угловая скорость симметричного волчка.....	4
Геометрическая интерпретация свободной прецессии.....	5
Угловая скорость прецессии .....	6
Моделирование свободной прецессии .....	7
Управление программой .....	10
Прецессия и нутация гироскопа .....	11
Регулярная прецессия волчка .....	12
Нутация оси гироскопа .....	15
Прецессия вместе с нутацией.....	16
Управление программой.....	20
Дополнение. Альтернативное объяснение вынужденной прецессии гироскопа .....	21

Задача о вращении твердого тела изучалась на протяжении столетий, и уравнения, описывающие такое вращение, хорошо известны со времен Эйлера. И в наше время в большинстве учебников по физике и теоретической механике вращение твердого тела рассматривается на основе уравнений Эйлера, которые справедливы в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с телом. Однако нас прежде всего интересует, как тело движется в пространстве, т.е. относительно инерциальной системы отсчета. Переход к инерциальной системе от системы отсчета, связанной с телом, которое совершает сложное вращение, для студента может оказаться весьма нелегким. С педагогической точки зрения представляется целесообразным найти решение задачи о вращении твердого тела непосредственно в инерциальной системе отсчета. В данном учебном пособии сделана попытка внести максимальную ясность в решение задачи о свободном вращении симметричного волчка (свободной прецессии) и о вынужденной прецессии гироскопа.

## Свободное вращение твердого тела

Под свободным движением твердого тела понимают движение, происходящее в отсутствие внешних сил. Этот простейший вид движения принято называть «движением по инерции». Для материальной точки движение по инерции действительно оказывается очень простым – это равномерное прямолинейное движение. Но для твердого тела только поступательное движение по инерции (т.е. движение, при котором тело не вращается) будет достаточно простым. Если же тело вращается, его движение даже в отсутствие внешних сил может быть значительно более сложным. Проиллюстрировать характерные черты «вращения по инерции» призвана небольшая моделирующая компьютерная программа (Java-апплет) [«Свободное вращение симметричного волчка»](#), которая не требует предварительной установки на компьютер, а выполняется непосредственно в браузере.

### ***Сведения из теории – главные оси инерции тела***

Произвольное движение твердого тела можно разложить на поступательное движение, в котором все точки тела движутся с такой же скоростью, как и центр масс тела, и вращение вокруг центра масс. В отсутствие внешних сил центр масс движется прямолинейно и равномерно. Для анализа вращения тела целесообразно перейти в систему центра масс, т.е. в инерциальную систему отсчета, в которой центр масс тела покоится, а оси ко-

ординат имеют неизменные направления в пространстве. В этой системе отсчета движение твердого тела – это вращение вокруг неподвижной точки (вокруг центра масс).

Кинематика вращения вокруг неподвижной точки характеризуется вектором мгновенной угловой скорости  $\omega$ . В каждый момент времени скорость любой точки твердого тела будет такой, как если бы тело только вращалось вокруг оси, направленной вдоль вектора угловой скорости  $\omega$ . Но в общем случае свободного вращения тела вектор угловой скорости и, следовательно, мгновенная ось вращения, непрерывно меняют свое направление. Даже при отсутствии моментов внешних сил, т.е. при инерционном вращении (вращении «по инерции»), поведение мгновенной оси вращения оказывается весьма сложным. Еще более сложными представляются при этом траектории отдельных точек тела.

С помощью компьютерной программы [«Свободное вращение симметричного волчка»](#) можно получить наглядное представление о том, как при вращении по инерции ведет себя мгновенная ось в пространстве и как меняется ее положение в самом теле, и по каким траекториям движутся разные точки тела. В программе моделируются движения не любых тел, а лишь таких, которые принято называть симметричными волчками (см. ниже).

При вращении твердого тела вектор момента импульса  $L$  (иначе его называют вектором углового момента) пропорционален мгновенной угловой скорости  $\omega$ , но, вообще говоря, не совпадает с  $\omega$  по направлению. Совпадение направлений  $L$  и  $\omega$  будет только тогда, когда угловая скорость направлена вдоль одной из трех взаимно перпендикулярных осей, называемых главными осями инерции тела. Для симметричных тел из однородного материала главные оси инерции совпадают с осями симметрии тела. Например, в случае прямоугольного параллелепипеда главные оси инерции проходят через геометрический центр параллельно ребрам. Моменты инерции тела относительно проходящих через центр масс главных осей называются главными центральными моментами инерции.

Свободное вращение твердого тела вокруг главных осей инерции, когда векторы  $L$  и  $\omega$  совпадают по направлению, происходит очень просто. В самом деле, в отсутствие моментов внешних сил сохраняется вектор момента импульса  $L$ . Отсюда сразу следует, что сохраняется направление вектора угловой скорости  $\omega$  в пространстве и сохраняется величина угловой скорости. Поэтому главные оси инерции называют еще осями свободного вращения тела. Если твердое тело раскручено вокруг одной из этих осей, оно и дальше просто равномерно вращается вокруг оси, направление которой в пространстве не изменяется. Траектория любой точки тела – это окружность с центром на оси вращения.

Можно показать, что свободное вращение вокруг осей с наибольшим и наименьшим центральными моментами инерции устойчиво. Устойчивость вращения означает, что малое отклонение направления угловой скорости от главной оси в начальный момент времени остается малым в процессе дальнейшего свободного вращения. Напротив, вращение вокруг главной оси инерции, которой соответствует промежуточное значение момента инерции, неустойчиво: если в начальный момент угловая скорость немного отклоняется по направлению от оси, в дальнейшем угол отклонения стремительно нарастает, и вместо простого равномерного вращения вокруг неизменного направления тело начинает совершать беспорядочное на вид кувыркание. При этом вектор мгновенной угловой скорости все время изменяет свое направление в пространстве и в самом теле.

Свойство устойчивости свободного вращения вокруг главных осей инерции легко проверить с помощью простого опыта. Возьмите полный спичечный коробок или любой брусок из однородного материала (дерева, пенопласта) и подбросьте его, одновременно закрутив вокруг одной из главных осей инерции. Наблюдайте, как вращается коробок, пока он находится в свободном полете. Если Вы раскрутили коробок вокруг оси, направленной перпендикулярно самой большой его плоскости, т.е. вокруг оси с максимальным моментом инерции, то во время полета коробка эта ось сохраняет свое направление в про-

странстве независимо от того, как Вы направили ее в момент бросания – вертикально, горизонтально или под произвольным углом. То же самое будет происходить и тогда, когда коробок раскручен вокруг оси, параллельной самому длинному ребру, т.е. вокруг оси с наименьшим моментом инерции. Для сообщения коробку такого вращения придется немного потренироваться: здесь потребуется некоторая «ловкость рук». Но при раскручивании вокруг оси, параллельной среднему ребру, коробок в полете практически сразу начинает беспорядочно кувыркаться. Как бы тщательно Вы не старались раскрутить коробок точно вокруг заданной оси, избежать какого-то небольшого отклонения начальной угловой скорости от этой оси не удастся. И если в случаях вращения коробка вокруг осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции малое начальное отклонение вектора угловой скорости от оси остается малым в процессе дальнейшего движения, то для оси с промежуточным моментом инерции начальное отклонение быстро возрастает.

### **Момент импульса и угловая скорость симметричного волчка**

Когда направление начальной угловой скорости отклонено от главной оси инерции тела, свободное вращение происходит сравнительно просто для так называемого симметричного волчка. Симметричный волчок – это тело, у которого два из трех главных центральных моментов инерции имеют равные значения. Примеры таких тел – однородный брусок с квадратным основанием и вообще любая призма или пирамида с основанием в виде правильного многоугольника (в том числе и треугольника), изготовленная из материала постоянной плотности, круговые диск, цилиндр или конус, эллипсоид вращения (вытянутый или сжатый сфероид), и т.п. При вращении таких тел вокруг оси симметрии момент импульса также направлен вдоль этой оси. Если же вектор угловой скорости  $\omega$  отклонен от оси симметрии тела на некоторый угол, то вектор момента импульса  $L$  не совпадает с  $\omega$  по направлению, но обязательно лежит в одной плоскости с  $\omega$  и осью симметрии тела. Взаимное расположение этих векторов показано на рис. 1.

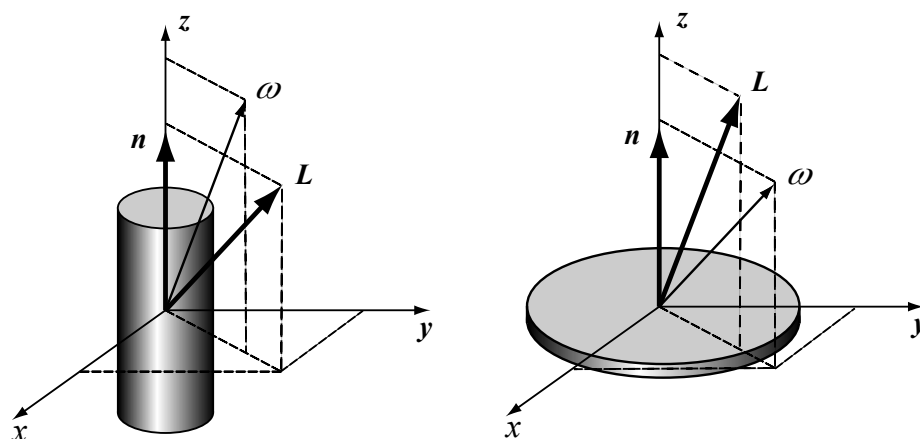


Рис. 1. Взаимное расположение векторов угловой скорости  $\omega$ , момента импульса  $L$  и оси симметрии (вектор  $n$ ) для тел вытянутой формы (слева) и сплюсненной формы (справа).

Момент импульса  $L$  отклонен от оси симметрии тела на больший угол, нежели вектор  $\omega$ , если момент инерции тела относительно поперечной оси больше, чем относительно продольной оси. Такое взаимное расположение векторов  $L$  и  $\omega$  относительно оси фигуры характерно для тел вытянутой формы (рис. 1, слева). Для сплюсненного вдоль оси тела вектор  $L$  отклонен от оси тела на меньший угол, нежели вектор  $\omega$  (рис. 1, справа).

Введем единичный вектор  $\mathbf{n}$ , показывающий направление оси симметричного волчка в пространстве, т.е. выходящий из начала системы координат (из центра масс) и направленный вдоль оси волчка. В каждый момент времени все три вектора  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  лежат в одной плоскости, и при движении тела их взаимное расположение остается неизменным. Легко понять, что в отсутствие моментов внешних сил плоскость, содержащая векторы  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ , равномерно поворачивается вокруг неизменного в пространстве направления вектора  $\mathbf{L}$ . В самом деле, скорость  $\mathbf{v}$  той точки оси волчка, которая совпадает с концом вектора  $\mathbf{n}$ , выражается через угловую скорость по формуле  $\mathbf{v} = d\mathbf{n}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}$ . Это означает, что в любой момент конец вектора  $\mathbf{n}$  движется перпендикулярно рассматриваемой плоскости, увлекая ее за собой вместе с лежащими в ней векторами  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ . Таким образом, вся плоскость равномерно вращается вокруг  $\mathbf{L}$ , а лежащие в ней векторы  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  синхронно описывают в пространстве конусы, вершины которых лежат в начале координат. О таком поведении векторов  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  говорят, что они совершают вокруг  $\mathbf{L}$  регулярную прецессию. Можно показать, что угловая скорость этой прецессии  $\boldsymbol{\Omega}$  пропорциональна моменту импульса  $\mathbf{L}$  и обратно пропорциональна центральному моменту инерции волчка  $I_{\perp}$  относительно поперечной оси:  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L}/I_{\perp}$  (см. ниже раздел «Угловая скорость прецессии»). Такую свободную прецессию оси волчка, происходящую в отсутствие внешних моментов при несовпадении угловой скорости с осью волчка, называют также *нутацией*. Подчеркнем, что ось волчка сохраняет свое направление в пространстве (не прецессирует), если при свободном вращении угловая скорость направлена вдоль оси волчка: в таких случаях нутация не происходит.

### Геометрическая интерпретация свободной прецессии

На рис. 2 показана наглядная геометрическая интерпретация поведения оси  $\mathbf{n}$  волчка и вектора мгновенной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  при описанной выше регулярной прецессии, т.е. при свободном вращении симметричного волчка.

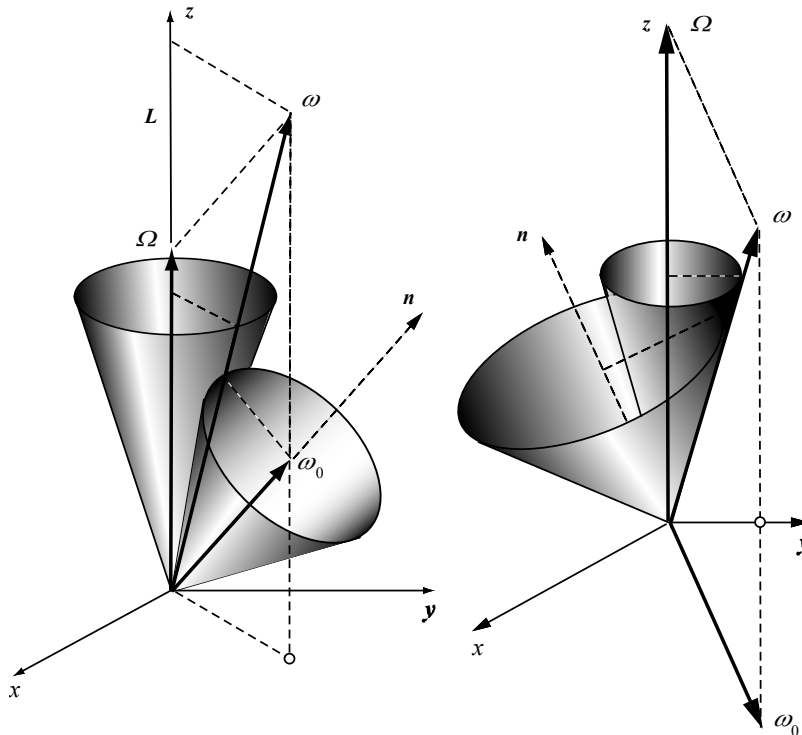


Рис. 2. Геометрическая интерпретация свободной прецессии симметричного волчка как качения без проскальзывания мысленно связанного с телом подвижного аксоида по поверхности неподвижного аксоида ( $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\Omega}$ ).

На этом рисунке вектор момента импульса  $L$ , сохраняющий свое направление в пространстве, для большей наглядности направлен вертикально (вдоль оси  $z$ ). Вектор угловой скорости прецессии  $\Omega = L/I_{\perp}$  направлен вдоль  $L$ . Векторы  $n$  и  $\omega$  лежат в одной и той же проходящей через  $\Omega$  вертикальной плоскости, и для вытянутого вдоль оси тела отклонены от  $\Omega$  в одну сторону, как показано в левой части рис. 2. Вектор мгновенной угловой скорости  $\omega$  совершает прецессию вокруг неизменного направления вектора момента импульса  $L$  с угловой скоростью  $\Omega$ , т.е. описывает в пространстве неподвижный круговой конус с вершиной в центре масс. Угол между осью этого конуса и образующей равен углу отклонения вектора  $\omega$  от направления  $L$ . Этот угол остается неизменным при движении тела. В каждый момент времени вектор  $\omega$  показывает направление оси вращения тела в пространстве. Поэтому множество мгновенных осей вращения в разные моменты времени образует в пространстве круговой конус с вершиной в центре масс тела и осью, направленной вдоль  $L$  (вертикально на рис. 2). Такой конус называют неподвижным аксоидом.

Представим себе еще один круговой конус, на этот раз жестко связанный с телом. Вершина этого конуса также находится в центре масс, а его ось направлена вдоль вектора  $n$ , показывающего направление оси симметрии тела в пространстве (см. рис. 2). Пусть угол между осью и образующей этого конуса равен неизменному при движении тела углу между векторами  $n$  и  $\omega$ , т.е. вектор  $\omega$  проходит вдоль образующей конуса. Другими словами, мгновенная ось вращения  $\omega$  в любой момент времени совпадает с одной из образующих связанного с телом конуса, а вся боковая поверхность этого конуса показывает, как расположена мгновенная ось вращения в разные моменты времени в самом теле, т.е. дает положение всего множества мгновенных осей вращения относительно тела. По этой причине такой мысленно связанный с движущимся телом круговой конус называют подвижным аксоидом.

Подвижный и неподвижный конусы соприкасаются своими боковыми поверхностями вдоль вектора  $\omega$ , т.е. вдоль мгновенной оси вращения. Скорости всех точек тела, лежащих в данный момент на мгновенной оси вращения, равны нулю. Это значит, что поведение мысленно связанного с телом подвижного аксоида представляет собой качение без проскальзывания по поверхности неподвижного аксоида. Точки тела, лежащие на оси симметрии, описывают окружности, центры которых находятся на оси неподвижного аксоида. Движение точек тела, не лежащих на оси симметрии, можно представить как сложение двух движений, а именно, вращения тела вокруг собственной оси с одновременным движением этой оси по конусу прецессии.

Наглядному геометрическому представлению кинематики свободного вращения симметричного волчка в виде качения без проскальзывания подвижного аксоида по поверхности неподвижного соответствует показанное на рис. 2 разложение вектора мгновенной угловой скорости  $\omega$  на сумму двух составляющих векторов  $\omega_0$  и  $\Omega$ .

$$\omega = \omega_0 + \Omega.$$

Вектор  $\omega_0$  соответствует вращению тела вокруг собственной оси симметрии. Направление этого вектора неизменно в самом теле, а в пространстве он совершает прецессию вокруг направления вектора  $\Omega$ , описывая вместе с осью тела круговой конус. Направление второго слагаемого  $\Omega$  неизменно в пространстве. Оно соответствует прецессии оси симметрии тела вокруг момента импульса  $L$ , сохраняющего свое направление.

### ***Угловая скорость прецессии***

Как уже было отмечено, угловая скорость  $\Omega$  прецессии может быть выражена через полный момент импульса  $L$  и момент инерции тела  $I_{\perp}$  относительно поперечной оси. Чтобы получить это выражение, обратимся к рис. 3, на котором вектор  $\omega$  мгновенной угловой

скорости представлен в виде суммы  $\omega_0 + \Omega$  угловых скоростей вращения тела относительно собственной оси и прецессии, а также в виде суммы взаимно ортогональных продольной и поперечной ( $\omega_{\perp}$ ) компонент.

Такие разложения вектора  $\omega$  на компоненты соответствуют двум различным возможностям представления сложного свободного вращения твердого тела в виде суперпозиции двух простых вращений. В первой возможности ( $\omega = \omega_0 + \Omega$ ) одно вращение происходит вокруг оси симметрии, т.е. направления  $n$ , неизменного в самом теле, а второе – вокруг направления  $L$ , неизменного в пространстве. Векторы угловых скоростей  $\omega_0$  и  $\Omega$ , соответствующие этим вращениям, не ортогональны друг другу.

Во второй возможности разложения вектора  $\omega$  на компоненты одно вращение также происходит вокруг неизменного в теле направления  $n$ , но с иной (отличной от  $\omega_0$ ) угловой скоростью, а второе – вокруг направления, перпендикулярного к оси симметрии тела (тоже неизменного в теле). Во втором случае две компоненты угловой скорости  $\omega$  взаимно ортогональны. Из рис. 3 легко заключить, что проекции каждого из векторов  $\omega$  и  $\Omega$  на направление, перпендикулярное к оси симметрии тела, имеют одно и то же значение  $\omega_{\perp}$ .

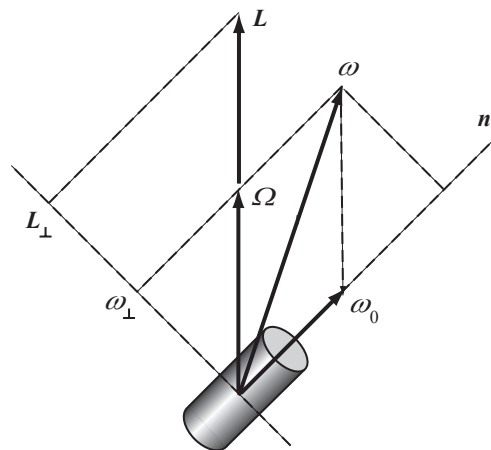


Рис. 3. Соотношение между вектором  $L$  полного момента импульса и вектором  $\Omega$  угловой скорости прецессии.

Рассмотрим подобные прямоугольные треугольники с общим острым углом, гипотенузы которых образованы векторами  $L$  and  $\Omega$ , а катеты – векторами  $L_{\perp}$  и  $\omega_{\perp}$  соответственно. На основании подобия этих треугольников можно написать следующую пропорцию:  $L/L_{\perp} = \Omega/\omega_{\perp}$ . Принимая во внимание, что  $L_{\perp} = I_{\perp}\omega_{\perp}$ , из этой пропорции получаем искомое выражение для угловой скорости прецессии  $\Omega$  через момент импульса  $L$ :  $\Omega = L/I_{\perp}$ . При малых отклонениях  $\omega$  от  $n$  (когда  $\omega_{\perp} \ll \omega$ ) из этого точного соотношения следует, что угловая скорость прецессии  $\Omega$  приближенно равна полной угловой скорости  $\omega$ , умноженной на отношение продольного и поперечного моментов инерции тела. Это значит, что в случае вытянутого вдоль оси тела  $\Omega < \omega$  (прецессия происходит медленнее, чем вращение тела вокруг оси), в то время как для сплюснутых тел  $\Omega > \omega$ . В частности, для тонкого диска угловая скорость прецессии вдвое больше мгновенной угловой скорости:  $\Omega \approx 2\omega$ .

### **Моделирование свободной прецессии**

На рис. 3 показано окно программы [«Свободное вращение симметричного волчка»](#) с перспективной иллюстрацией свободной прецессии симметричного волчка вытянутой формы (слева) и геометрической интерпретацией такого вращения (справа).

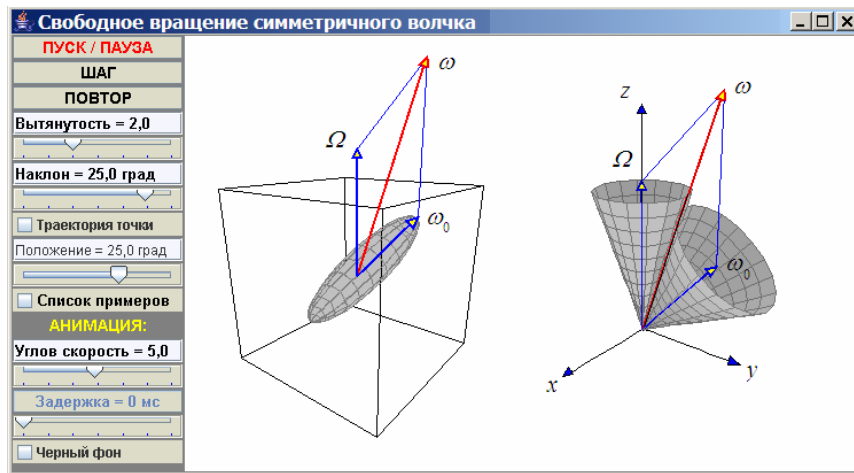


Рис. 3. Иллюстрация свободного вращения симметричного волчка вытянутой формы (слева) и геометрической интерпретацией этого вращения (справа).

В случае симметричного волчка сплюсненной формы свободное вращение может представиться еще более неожиданным. Действительно, для такого тела векторы  $n$  и  $\omega$ , как это видно из правой части рис. 1, расположены по разные стороны вектора момента импульса  $L$ . При этом связанный с телом подвижный аксоид соприкасается с неподвижным аксоидом своей внутренней поверхностью, как показано в правой части рис. 2.

Разложение вектора мгновенной угловой скорости  $\omega$  на составляющие  $\omega_0$  и  $\Omega$  свидетельствует о том, что в этом случае векторы  $\omega_0$  и  $\Omega$  образуют между собой тупой угол. Иначе говоря, вектор  $\omega_0$  угловой скорости вращения вокруг собственной оси направлен от вершины подвижного аксоида в сторону, противоположную вектору  $n$  (т.е. противоположно по сравнению со случаем вытянутого тела). Это значит, что когда прецессия оси тела происходит против часовой стрелки и подвижный аксоид катится своей внутренней поверхностью по охватываемому им неподвижному аксоиду (совершает внутреннее качение), собственное вращение тела происходит в противоположную сторону, т.е. по часовой стрелке. Рис. 4 дает представление о том, как компьютерная программа иллюстрирует такое необычное на первый взгляд поведение.

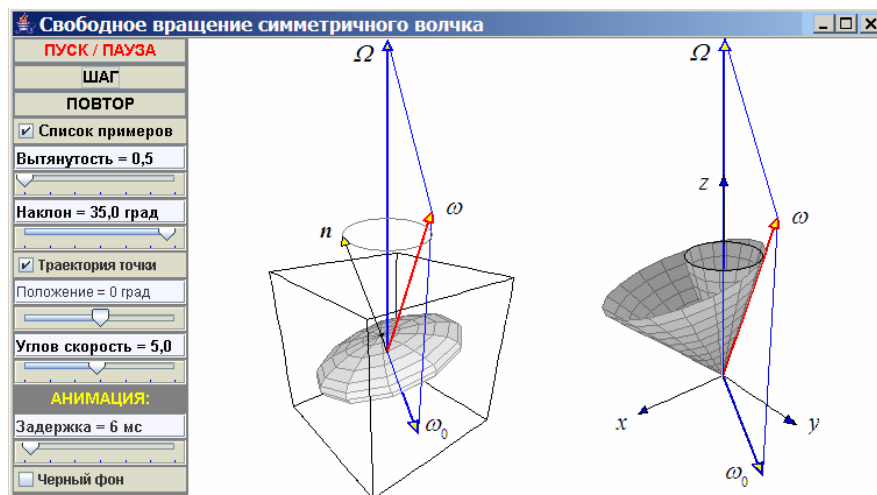


Рис. 4. Иллюстрация свободного вращения симметричного волчка сплюсненной формы (слева) и геометрическая интерпретация этого вращения (справа).

В частности, для тонкого диска при малых отклонениях мгновенной угловой скорости от его оси симметрии угловая скорость прецессии, как уже отмечалось, приблизительно вдвое больше мгновенной угловой скорости:  $\Omega \approx 2\omega$ . При этом вектор  $\omega_0$  угловой скорости собственного осевого вращения и мгновенная угловая скорость  $\omega$  приблизительно

равны по величине и направлены почти противоположно. Это значит, что прецессия и вращение тонкого диска вокруг собственной оси происходят в противоположных направлениях, о чем можно судить при наблюдении моделирования такого необычного поведения диска при свободном вращении (см. рис. 4). При этом прецессия происходит примерно вдвое быстрее собственного вращения.

Компьютерная программа дает наглядную картину движения в пространстве подвижного аксоида, который мы мысленно связываем с вращающимся по инерции телом. Чтобы представить себе, по каким траекториям движутся при этом отдельные точки тела, можно поставить «флажок» в боксе «Траектория точки» на панели управления программой (см. рис. 4) и задать положение этой точки, указав угол, на который отклоняется от оси симметрии волчка вектор, направленный в эту точку из центра масс. Для наглядности программа строит траекторию точки, находящейся на конце тонкой стрелки, выходящей из центра масс за пределы самого тела. Можно представлять себе эту стрелку как жестко связанную с телом («воткнутую» в него). Все точки этой стрелки описывают геометрически подобные траектории. Траектория конца стрелки крупнее всех остальных, что позволяет наблюдать характерные особенности таких траекторий в более крупном масштабе.

Если для построения траектории выбрать точку на оси волчка, т.е. задать для направления на точку угол, равный нулю, то траектория точки будет представлять собой окружность (см. рис. 4) – точки на оси волчка описывают наиболее простые траектории. Можно, например, выбрать точку, которая находится на поверхности подвижного аксоида, скажем, в начальный момент лежит на мгновенной оси вращения. Для этого нужно задать направление на точку равным углу отклонения вектора угловой скорости от оси волчка. При моделировании мы получим для такой точки траекторию с изломами, напоминающую циклоиду: ее отдельные дугообразные участки, лежащие на поверхности сферы, соединяются друг с другом острым «клювом», имея в точках соединения общую касательную. Если же мы выберем точку, которая лежит к оси вытянутого волчка ближе, чем поверхность подвижного аксоида, при моделировании получим волнообразную траекторию. Точки, удаленные от оси вытянутого волчка дальше, чем поверхность подвижного аксоида, т.е. находящиеся за его пределами, описывают петлеобразные траектории.

В случае симметричного волчка сплюсненной формы, напротив, петлеобразные траектории характерны для точек, которые находятся к оси симметрии ближе, чем поверхность связанного с телом подвижного аксоида. Рис. 5 дает представление о том, как выглядит траектория такой точки.

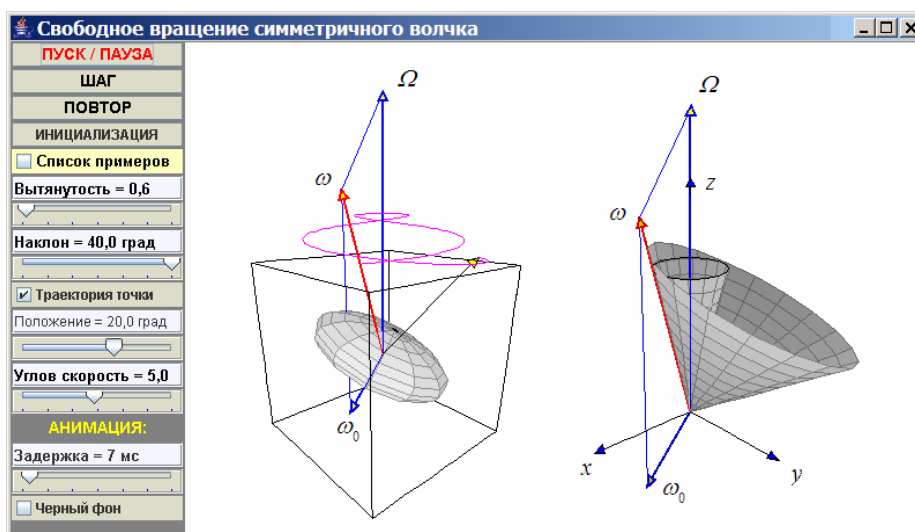


Рис. 5. Траектория точки, жестко связанной с симметричным волчком сплюсненной формы, вращающимся по инерции.

Промежуточное положение между рассмотренными выше случаями вытянутого вдоль оси и сплющенного симметричного волчка занимает так называемый шаровой волчок – тело, у которого все три главных центральных момента инерции равны. Шаровой волчок не обязательно должен иметь сферическую форму. Например, у куба из однородного материала все три главных момента инерции тоже равны, т.е. при вращении он динамически эквивалентен шару. Любой правильный многогранник (тетраэдр, икосаэдр, додекаэдр) также представляет собой шаровой волчок. Все такие тела при вращении вокруг центра масс ведут себя одинаково.

У шарового волчка направления главных осей инерции могут быть выбраны произвольно: любую тройку взаимно перпендикулярных осей с началом в центре масс можно рассматривать в качестве главных. В частности, для кубика эти оси совершенно необязательно направлять параллельно ребрам. Это значит, что любая ось, проходящая через центр масс, будет осью свободного вращения – при любом направлении вектора угловой скорости  $\omega$  вектор момента импульса  $L$  будет совпадать с ним по направлению. Для шарового волчка вращение по инерции вокруг любой оси представляет собой равномерное вращение с сохранением направления оси вращения в пространстве.

Само собой разумеется, что рассмотренная выше геометрическая интерпретация свободного вращения симметричного волчка применима и к частному случаю равенства продольного и поперечного моментов инерции, т.е. к случаю шарового волчка. Так как у шарового волчка вектор угловой скорости  $\omega$  и направленная вдоль него мгновенная ось вращения сохраняют свое направление в пространстве (не прецессируют), то конус неподвижного аксоида вырождается в полупрямую, направленную вдоль вектора момента импульса  $L$ . Иллюстрация поведения шарового волчка в компьютерной программе показана на рис. 6. Качение подвижного аксоида, жестко связанного с телом, по выродившемуся в прямую неподвижному аксоиду сводится к равномерному вращению подвижного конуса вокруг своей образующей. Эта образующая совпадает по направлению с вектором момента импульса  $L$  и неизменным вектором угловой скорости  $\omega$ . Любая точка шарового волчка (например, конец стрелки на рис. 6, жестко связанной с телом) описывает окружность с центром на оси вращения.

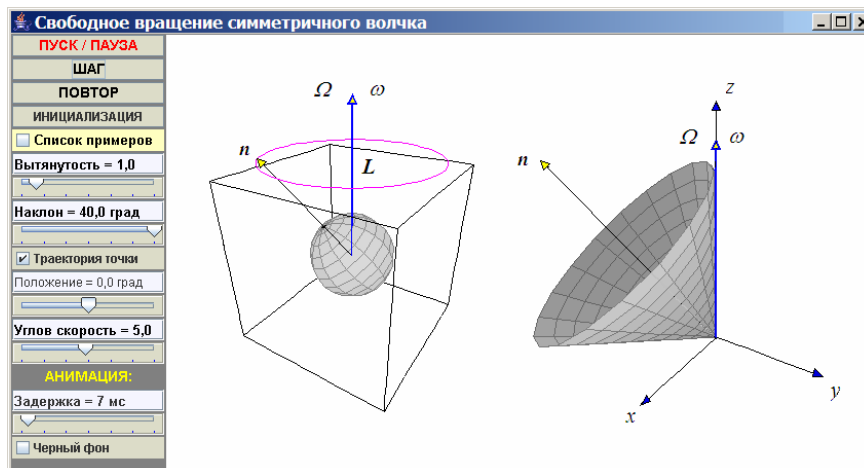


Рис. 6. Свободное вращение шарового волчка и его геометрическая интерпретация.

## Управление программой

Программа позволяет изменять параметры моделируемой системы и условия наблюдения. Для удобства наблюдения изображение в окнах можно поворачивать вокруг вертикальной и горизонтальной осей – вращать куб, в центре которого находится тело, и поворачивать оси координат. Этим достигается возможность смотреть на изображение трехмерных объектов с разных точек, например, сбоку, сверху или снизу. Для изменения точ-

ки зрения нужно привести указатель мыши в пределы окна, нажать левую кнопку и, не отпуская ее, перемещать («перетаскивать») указатель в ту или иную сторону, добиваясь наиболее удобного для наблюдения расположения осей координат и объектов на экране. Если при этом одновременно удерживать нажатой кнопку «Control» на клавиатуре, то мышью можно сдвигать изображение в желаемом направлении. Если же удерживать нажатой кнопку «Shift», то при перемещении указателя мыши будет изменяться масштаб изображения – предметы будут приближаться либо удаляться от наблюдателя.

Вращение тела можно отображать в удобном для наблюдения масштабе времени. Изменение временного масштаба достигается введением задержки, которую можно изменить с помощью движка в нижней части панели управления. Назначение других органов управления на этой панели интуитивно понятно. Самая верхняя кнопка служит для пуска и приостановки моделирования. Вторая кнопка позволяет выполнять моделирование пошагово. Третья кнопка восстанавливает начальные условия, а четвертая – задаваемые по умолчанию значения параметров.

При первом знакомстве с программой можно не утруждать себя вводом параметров, а ограничиться выбором заранее заготовленных примеров из предлагаемого списка. Этот список можно открыть, поставив «галочку» в соответствующем боксе на панели управления. Для детального изучения свободной прецессии следует проделать моделирование при разных значениях параметров. Изменять параметры можно перемещением движков на панели управления, либо вводя нужные значения с клавиатуры. Предварительно нужно приостановить моделирование кнопкой «Пуск/Пауза». При вводе какого-либо параметра с клавиатуры поле ввода становится ярко желтым. Завершать ввод нужно нажатием клавиши «Enter», при этом поле ввода принимает прежний цвет.

Инертные свойства симметричного волчка при вращении определяются продольным и поперечным моментами инерции. Для моделирования существенны не сами по себе значения этих моментов, а только их отношение. В программе отношение момента инерции относительно поперечной оси к продольному задается параметром «Вытянутость». Программа допускает значения этого параметра в пределах от 0,5 до 5,0. Если этот параметр равен 1, поперечный и продольный моменты инерции равны, т.е. симметричный волчок превращается в шаровой. У вытянутого вдоль оси тела этот параметр больше единицы (поперечный момент инерции больше продольного), у сплюсненного – меньше единицы.

Еще один параметр, который можно изменять в программе – это угол между направлением вектора угловой скорости и осью волчка. На панели управления он обозначен как «Наклон». Значение угла наклона нужно вводить в градусах. Допустимые значения лежат в интервале от 0 до 40 градусов. Величину угловой скорости можно изменять в пределах от 0,5 до 10 (в относительных единицах). Изменение этого параметра сказывается на скорости вращения тела, но не изменяет качественно характера его движения. О том, как можно включить построение траектории какой-либо точки волчка, совершающего свободное вращение, и как выбрать положение этой точки относительно оси волчка, уже было сказано выше. Сняв «флажок» в самом нижнем боксе панели управления, можно сделать светлым фон окна, в котором программа отображает движение тела и его геометрическую интерпретацию в виде качения подвижного конуса по поверхности неподвижного.

## **Прецессия и нутация гироскопа**

Гироскопом называют тело вращения (например, массивный диск), приведенное в быстрое вращение вокруг оси симметрии. Первое знакомство с гироскопом обычно происходит в раннем детстве при наблюдении за необычным поведением известной игрушки – детского волчка или юлы. Пока волчок быстро вращается, он может устойчиво стоять на остром конце своей оси, сохраняя вертикальное положение оси и не падая на горизонтальную плоскость, хотя центр тяжести волчка расположен выше точки опоры. Если же

ось вращающегося волчка отклонена от вертикали, то под действием силы тяжести ось описывает в пространстве круговой конус с вертикальной осью, так что угол наклона оси остается неизменным. Такое движение волчка называют вынужденной прецессией (см. рис. 7). В данном разделе приводится краткое теоретическое объяснение вынужденной прецессии, которое иллюстрируется небольшой моделирующей компьютерной программой [«Вынужденная прецессия гироскопа»](#). Эта программа (Java-апплет) не требует предварительной установки на компьютер, а выполняется непосредственно в браузере.

### **Регулярная прецессия волчка**

Необычное на первый взгляд поведение гироскопа объясняется законом изменения момента импульса под действием внешних сил. Согласно этому закону, скорость изменения момента импульса  $\mathbf{L}$  (называемого иначе угловым моментом) любого тела относительно некоторой точки равна суммарному моменту  $\mathbf{N}$  действующих на тело внешних сил:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}. \quad (1)$$

Когда волчок вращается вокруг собственной оси, вектор момента импульса  $\mathbf{L}$  тоже направлен вдоль этой оси. Направление  $\mathbf{L}$  связано с направлением вращения волчка правилом правого винта. Будем указывать направление оси волчка в пространстве (от точки опоры к центру масс) с помощью единичного вектора  $\mathbf{n}_0$  (рис. 1). Пусть  $I_0$  – момент инерции волчка относительно оси симметрии (например, для однородного диска или цилиндра  $I_0 = \frac{1}{2}mR^2$ , где  $m$  – масса,  $R$  – радиус), а  $\omega_0$  – угловая скорость вращения вокруг собственной оси (положительная при вращении против часовой стрелки). Тогда вектор момента импульса волчка можно представить в виде  $\mathbf{L} = I_0\omega_0\mathbf{n}_0$ .

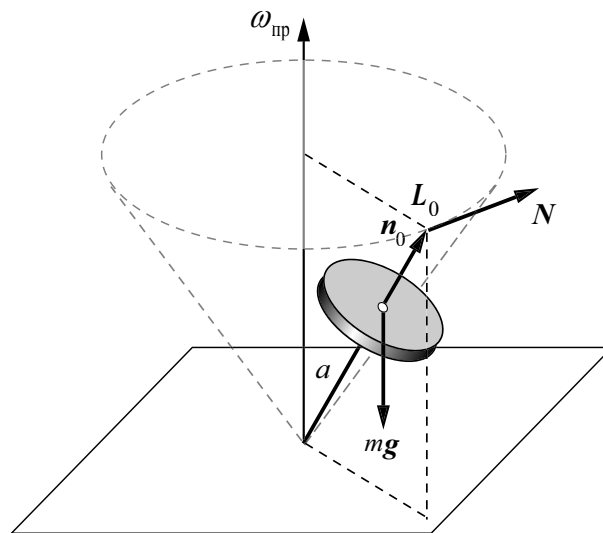


Рис. 7. Установившаяся (регулярная) прецессия гироскопа под действием силы тяжести.

Наклоненный к вертикали волчок прецессирует, т.е. помимо вращения вокруг собственной оси поворачивается еще и вокруг вертикальной оси. При быстром собственном вращении эта прецессия (поворот вокруг вертикальной оси) происходит настолько медленно, что с хорошей точностью можно пренебречь той составляющей момента импульса, которая обусловлена прецессией вокруг вертикали. Иными словами, приближенно можно считать, что вектор полного момента импульса  $\mathbf{L}$  и в этом случае направлен вдоль оси волчка:  $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}_0 = I_0\omega_0\mathbf{n}_0$ . Именно такой быстро вращающийся вокруг собственной оси волчок и называют гироскопом. В приближенной теории гироскопа, основанной на законе изменения момента импульса (1), как раз и предполагается, что вектор  $\mathbf{L}$  равен  $\mathbf{L}_0$  и все

время направлен вдоль собственной оси волчка. Поэтому описываемое уравнением (1) поведение вектора  $\mathbf{L}$  говорит и о том, как ведет себя в пространстве ось гироскопа.

В случае тела, имеющего неподвижную точку (у детского волчка это точка опоры о горизонтальную плоскость), уравнение (1) удобно применять именно к этой точке. Будем называть эту точку полюсом. При выборе полюса в точке опоры момент силы реакции, действующей на волчок как раз в этой точке, обращается в нуль. В правой части уравнения (1) остается только момент  $\mathbf{N}$  силы тяжести  $m\mathbf{g}$ , который в каждый момент времени перпендикулярен вектору  $\mathbf{L}$ . Поэтому сила тяжести может изменить только направление  $\mathbf{L}$ , но не его длину, т.е. вызвать поворот вектора  $\mathbf{L}$ , а вместе с ним и поворот оси волчка вокруг вертикали, как это показано на рис. 7.

Пусть  $a$  – расстояние от точки опоры до центра тяжести. Тогда момент силы тяжести можно записать как векторное произведение вектора  $\mathbf{n}_0 a$ , проведенного из точки опоры вдоль оси волчка в центр тяжести, на силу  $m\mathbf{g}$ :  $\mathbf{N} = \mathbf{n}_0 a \times m\mathbf{g}$ . Вектор  $\mathbf{N}$  лежит в горизонтальной плоскости и направлен перпендикулярно вектору  $\mathbf{n}_0$ , т.е. перпендикулярно оси волчка. Движение конца оси гироскопа происходит в направлении момента  $\mathbf{N}$  силы тяжести, а не в направлении самой силы тяжести  $m\mathbf{g}$ . Этим и объясняется «необычное» поведение гироскопа. Согласно уравнению (1), за каждый малый промежуток времени  $dt$  вектор момента импульса  $\mathbf{L}$  получает под действием силы тяжести приращение  $d\mathbf{L} = \mathbf{N} dt$ , направленное вдоль  $\mathbf{N}$ , т.е. лежащее в горизонтальной плоскости перпендикулярно оси волчка. Отсюда следует, что вектор  $\mathbf{L}$  и вместе с ним ось волчка равномерно поворачиваются (совершают прецессию) вокруг вертикали, проходящей через точку опоры.

Угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}_{\text{пр}}$  этой прецессии можно найти, подставив  $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}_0 = I_0 \omega_0 \mathbf{n}_0$  в левую часть уравнения (1) и  $\mathbf{N} = \mathbf{n}_0 a \times m\mathbf{g}$  – в правую часть. Пренебрегая трением, угловую скорость собственного вращения  $\omega_0$  будем считать постоянной и вынесем за знак производной. В результате уравнение (1) принимает вид:

$$I_0 \omega_0 \frac{d\mathbf{n}_0}{dt} = \mathbf{n}_0 a \times m\mathbf{g}, \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{n}_0}{dt} = \boldsymbol{\omega}_{\text{пр}} \times \mathbf{n}_0, \quad \boldsymbol{\omega}_{\text{пр}} = -\frac{am}{I_0 \omega_0} \mathbf{g}. \quad (2)$$

Вектор угловой скорости прецессии  $\boldsymbol{\omega}_{\text{пр}}$  при  $\omega_0 > 0$  (т.е. при вращении гироскопа против часовой стрелки) направлен противоположно вектору  $\mathbf{g}$ , т.е. прецессия происходит тоже против часовой стрелки. Как следует из уравнения (2), величина угловой скорости прецессии обратно пропорциональна угловой скорости собственного вращения  $\omega_0$  и прямо пропорциональна расстоянию  $a$  от точки опоры до центра тяжести. Она не зависит от угла наклона оси волчка к вертикали.

Описываемое уравнением (2) поведение оси гироскопа называют регулярной прецессией. Это вынужденная прецессия, так как она происходит под действием момента силы тяжести. Все точки волчка, лежащие на его оси, равномерно движутся по круговым траекториям, центры которых лежат на вертикали, проходящей через точку опоры волчка. На рис. 8 приведена иллюстрация регулярной прецессии гироскопа с помощью компьютерной программы [«Вынужденная прецессия гироскопа»](#). Программа строит траекторию, которую прочерчивает конец оси (красная окружность), а также петлеобразную траекторию некоторой точки волчка, не лежащей на оси. Для наглядности строится траектория точки, находящейся на конце тонкой стрелки, выходящей из центра масс за пределы диска волчка. Можно представлять себе эту стрелку как жестко связанную с телом волчка («воткнутую» в него). Траектория конца стрелки крупнее всех остальных, что позволяет наблюдать в программе характерные особенности траекторий точек волчка в увеличенном масштабе. В программе расстояние от точки опоры волчка до конца стрелки выбрано равным длине оси волчка. Поэтому траектория выбранной точки и траектория конца оси лежат на поверхности одной и той же сферы с центром в точке опоры.

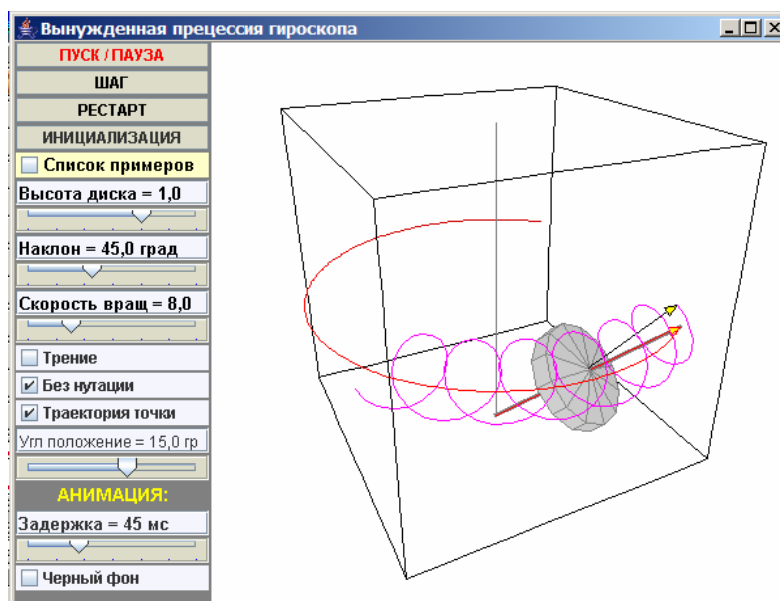


Рис. 8. Моделирование регулярной прецессии гироскопа. Показаны круговая траектория конца оси и петлеобразная траектория точки волчка, не лежащей на оси.

Замечательно, что регулярная прецессия, угловая скорость которой рассчитана выше на основе приближенной теории гироскопа, в действительности является одним из возможных точных решений динамического уравнения (1). Покажем это. В точной теории гироскопа необходимо принимать во внимание, помимо собственного момента импульса  $L_0$ , дополнительный вклад в полный момент импульса  $L$ , обусловленный участием гироскопа во вращениях вокруг других осей. В случае регулярной прецессии такой вклад создается дополнительным вращением волчка вокруг вертикали. Обозначим через  $L_{пр}$  соответствующий вектор, пропорциональный угловой скорости прецессии  $\omega_{пр}$  и совпадающий с ней по направлению, как показано на рис. 3.

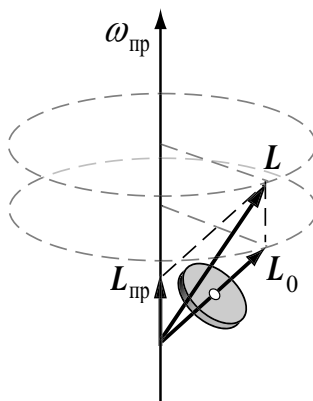


Рис. 9. Вектор  $L$  момента импульса волчка при регулярной прецессии.

При учете  $L_{пр}$  вектор полного момента импульса  $L$  уже не направлен точно по оси волчка (см. рис. 9). Но легко понять, что при регулярной прецессии волчка горизонтальные составляющие векторов  $L$  и  $L_0$  равны. Концы векторов  $L$  и  $L_0$  синхронно описывают одинаковые окружности, показанные на рис. 9 штриховыми линиями. Это означает, что скорости изменения этих векторов равны. Иначе говоря, равны производные  $L$  и  $L_0$  по времени:  $dL/dt = dL_0/dt$ . Оба вектора совершают прецессию вокруг вертикали с одной и той же угловой скоростью  $\omega_{пр}$ , т.е. их изменение с течением времени описывается одинаковыми уравнениями:

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \boldsymbol{\omega}_{\text{пр}} \times \mathbf{L}_0, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_{\text{пр}} \times \mathbf{L}. \quad (3)$$

Однако вынужденная регулярная прецессия волчка – это не единственно возможное точное решение уравнения (1), когда в правой его части стоит момент силы тяжести. Регулярная прецессия будет происходить только при строго определенных начальных условиях: чтобы получить такое движение, нужно не только раскрутить волчок вокруг собственной оси, но и сообщить этой оси вращение вокруг вертикали с нужной угловой скоростью, а именно, угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}_{\text{пр}}$ , с которой должна происходить дальнейшая прецессия волчка. В определенном смысле можно сказать, что сила тяжести, стремящаяся опрокинуть волчок, фактически не вызывает, а лишь поддерживает регулярную прецессию.

Роль силы тяжести при регулярной прецессии гироскопа можно сравнить с ролью силы натяжения нити при равномерном движении по окружности привязанного к ней шарика. Сила натяжения тянет шарик к центру окружности, но шарик при этом все время движется перпендикулярно к силе. Сила натяжения нити не создает, а лишь поддерживает равномерное движение шарика по окружности. Чтобы получить такое движение, шарик необходимо сообщить начальную скорость в поперечном направлении. Если иметь в виду эту аналогию, то поведение оси гироскопа при регулярной прецессии представится, возможно, не таким уж странным, каким оно кажется на первый взгляд.

### ***Нутация оси гироскопа***

Чтобы понять, каким будет движение гироскопа при произвольных начальных условиях, в общем случае не обеспечивающих возникновения регулярной прецессии, рассмотрим сначала следующую вспомогательную задачу. Представим себе, как будет двигаться волчок, совершающий регулярную прецессию под действием силы тяжести, если в некоторый момент времени сила тяжести внезапно исчезнет. Практически такую ситуацию можно получить, если, начиная с некоторого момента, дать возможность всей установке (волчку вместе с подставкой) свободно падать, так что волчок, совершавший до этого момента регулярную прецессию, внезапно окажется в состоянии невесомости.

Очевидно, что для ответа на этот вопрос нужно обратиться к задаче о симметричном волчке, вращающемся «по инерции», т.е. в отсутствие внешних сил. Такая задача рассматривается в первой части данного пособия (см. «Свободное вращение твердого тела») и иллюстрируется программой [«Свободная прецессия симметричного волчка»](#). При несовпадении направления момента импульса с осью волчка движение волчка можно представить как результат сложения двух вращений: вращения вокруг собственной оси (сохраняющей неизменное направление в теле волчка) с угловой скоростью  $\omega_0$  и одновременно вращения этой оси вокруг неизменного в пространстве направления вектора момента импульса  $\mathbf{L}$ . Ось волчка при этом описывает круговой конус вокруг направления вектора  $\mathbf{L}$ . Такое равномерное движение оси волчка по конусу в отсутствие внешних сил представляет собой свободную прецессию. Применительно к гироскопу ее принято называть нутацией.

Итак, вектор полного момента импульса  $\mathbf{L}$  нашего волчка, совершающего регулярную прецессию, не совпадает по направлению с осью волчка, как это можно видеть на рис. 9. В момент «выключения» силы тяжести вектор  $\mathbf{L}$  мгновенно останавливается, но ось волчка продолжает движение. Скорость оси в этот момент нужно рассматривать как начальную скорость для дальнейшего движения волчка в отсутствие силы тяжести. Картина этого движения показана на рис. 10. Это нутация, в процессе которой ось волчка (вектор  $\mathbf{n}_0$ ) описывает круговой конус с вершиной в точке опоры вокруг вектора  $\mathbf{L}$  полного момента импульса.

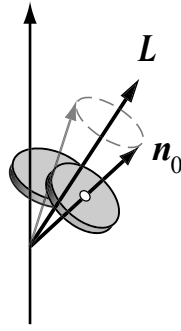


Рис. 10. Свободная прецессия (нутация) волчка вокруг направления полного момента импульса  $L$  в отсутствие силы тяжести.

Существованием нутаций объясняется еще одна особенность поведения гироскопа, которая может показаться парадоксальной. Согласно уравнению (1) момент импульса гироскопа  $L$  изменяется только тогда, когда на гироскоп действуют внешние силы и их момент  $N$  отличен от нуля. Если действие внешних сил прекращается, как в рассматриваемом нами примере, то в тот же момент времени прекращается изменение вектора  $L$  и, следовательно, прекращается прецессия гироскопа. Казалось бы, ось гироскопа с этого момента должна стать сразу неподвижной. Вместе с осью и центр масс волчка, во время прецессии двигавшийся по окружности, также должен мгновенно остановиться. Не противоречит ли такая безынерционность поведения волчка закону инерции?

Это противоречие действительно существовало бы, если отмеченная безынерционность относилась бы к движению оси гироскопа, а не вектора  $L$ . Вектор  $L$  и в самом деле ведет себя безынерционно, прекращая изменяться сразу в тот момент времени, когда прекращается действие внешних сил, как это следует из уравнения (1). К ложному заключению о безынерционности оси волчка приводит приближенная теория гироскопа, в которой предполагается, что вектор  $L$  всегда направлен вдоль оси гироскопа. В действительности у прецессирующего волчка вектор  $L$  отклонен от оси на некоторый угол, и при прекращении действия силы сразу возникает нутация вокруг неизменного в пространстве направления  $L$ . Скорость центра масс в момент возникновения нутации как раз равна той скорости, с которой он двигался до этого момента, т.е. пока происходила прецессия. Таким образом, учет нутации устраняет противоречие с законом инерции.

### ***Прецессия вместе с нутацией***

Теперь можно перейти к исследованию вопроса о том, как будет вести себя вращающийся волчок под действием силы тяжести при начальных условиях, не обеспечивающих немедленного возникновения регулярной прецессии. Из разобранных выше примера можно заключить, что в общем случае движение волчка должно представлять собой суперпозицию вынужденной регулярной прецессии и нутации.

Рассмотрим для определенности наиболее характерную ситуацию, когда мы сначала, во время раскручивания волчка, удерживаем его от падения за верхний конец наклоненной оси. Для этого мы должны к верхнему концу оси приложить силу, направленную вертикально вверх. Момент этой силы относительно точки опоры компенсирует момент силы тяжести. Если бы мы отпустили верхний конец оси до того, как привели волчок во вращение, ось стала бы просто падать вниз, ускоренно поворачиваясь вокруг точки опоры в вертикальной плоскости. Но как будет вести себя волчок, если мы отпускаем ось после того, как раскрутили его?

Очевидно, что в этом случае в начальный момент вектор момента импульса  $L$  направлен вдоль оси волчка. Как только мы отпускаем ось, появляется момент силы тяжести, и под действием этого момента вектор  $L$ , в соответствии с уравнением (1), начинает изменяться, стремясь двигаться по конусу так, как это происходит при регулярной прецес-

сии. Но если прецессия вектора  $L$  вокруг вертикали с угловой скоростью  $\omega_{\text{пр}}$  начинается сразу, безынерционно, то ось волчка, как и находящийся на ней центр масс, в начальный момент еще неподвижны, т.е. их начальная скорость равна нулю. Исходя из таких начальных условий, попробуем представить себе дальнейшее движение волчка как суперпозицию вынужденной прецессии и нутации.

Участие волчка в вынужденной прецессии означает, что у вектора полного момента импульса  $L$  должна быть вертикальная составляющая  $L_{\text{пр}}$ , обусловленная вращением волчка вокруг вертикали с угловой скоростью  $\omega_{\text{пр}}$ . Выделим  $L_{\text{пр}}$  из полного момента импульса, т.е. представим  $L$  в виде суммы  $L_{\text{пр}} + L_1$ , и будем рассматривать оставшуюся часть  $L_1$  как вклад собственного вращения волчка в полный момент импульса (см. рис. 11). Легко понять, что, если отвлечься от вынужденной прецессии волчка и сосредоточиться на его собственном вращении, то связанный с этим вращением момент импульса  $L_1$  уже не направлен точно вдоль оси волчка: вектор  $L_1$  отклонен от вертикали сильнее, чем ось волчка. Отклонение  $L_1$  от оси волчка означает, что одновременно с медленной вынужденной прецессией будет происходить быстрая нутация волчка, т.е. ось волчка будет описывать конус (с малым углом раствора) вокруг направления прецессирующего вектора  $L_1$ . Сложение этих двух движений дает для начального момента времени требуемую начальными условиями нулевую скорость оси волчка (и центра масс).

Чтобы начальная скорость оси действительно получилась равной нулю при сложении двух движений, вектор  $L_1$  должен быть отклонен от оси волчка (от вектора  $n_0$ ) на вполне определенный угол, зависящий от угла наклона оси волчка и отношения угловых скоростей нутации и прецессии. Именно этим углом между  $L_1$  и  $n_0$  определяется раствор конуса нутации. В программе [«Вынужденная прецессия гироскопа»](#) конус нутации выбирается таким, чтобы в момент освобождения оси волчка скорость оси была равна нулю.

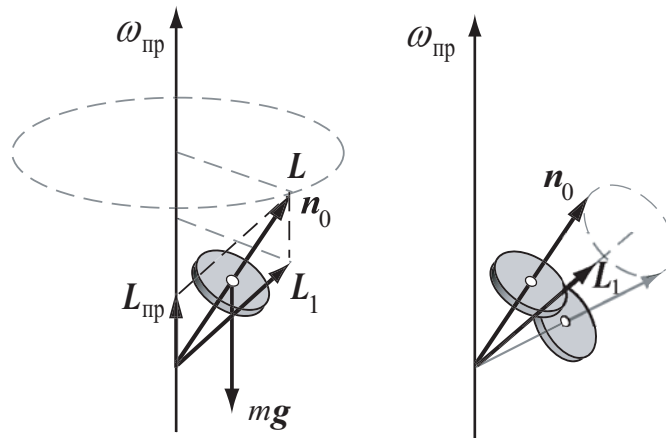


Рис. 11. Наложение нутации вокруг направления вектора  $L_1$  на вынужденную прецессию.

Итак, отпущенная ось волчка (вектор  $n_0$  на рис. 11) одновременно совершает два сравнительно простых движения: по вертикальному конусу, соответствующему установившейся вынужденной прецессии (рис. 11, слева) и по малому конусу нутации вокруг вектора момента импульса  $L_1$  собственного вращения (рис. 11, справа) с угловой скоростью  $\Omega = L_1/I_{\perp}$ . Первому из этих движений соответствует траектория верхнего конца оси в виде горизонтальной окружности, которая показана штриховой линией на рис. 11 слева; второму – малая окружность, перпендикулярная вектору  $L_1$  и показанная на рис. 11 справа. Оба движения начинаются в момент отпускания оси – до того волчок просто вращался вокруг неподвижной оси. Сложение этих движений дает для верхнего конца оси траекторию, напоминающую циклоиду, т.е. кривую, которую рисует точка на ободе колеса, катящегося без проскальзывания. Моделирующая программа строит траекторию конца оси

волчка (синяя линия на рис. 12) именно для таких начальных условий. Красная окружность показывает траекторию конца вектора  $L_1$ .

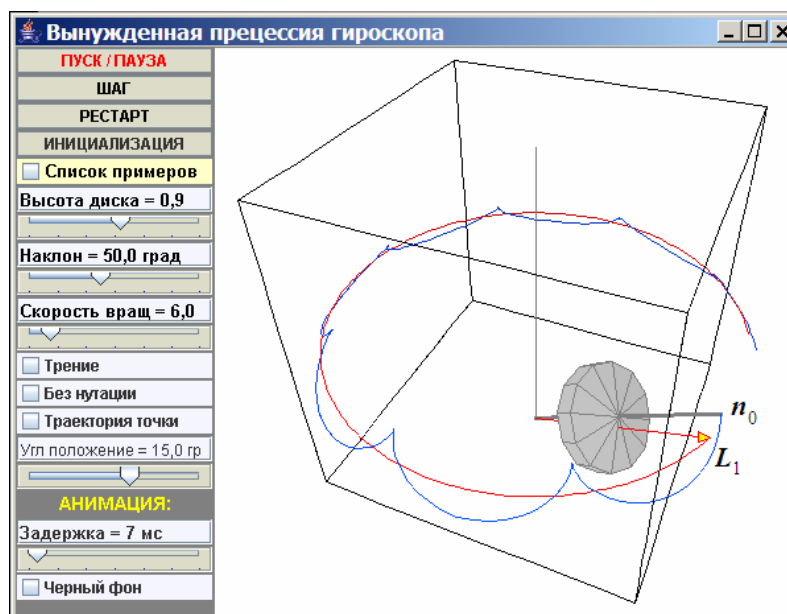


Рис. 12. Демонстрация вынужденной прецессии под действием силы тяжести вместе с нутацией, сопровождающей прецессию при освобождении оси раскрученного гироскопа.

Обратите внимание, что в первый момент, как только мы отпускаем ось волчка, под действием силы тяжести она действительно начинает падать вниз, что вполне согласуется с нашими интуитивными представлениями. Но по мере того, как ось набирает скорость, траектория ее верхнего конца все сильнее отклоняется от вертикали. Вскоре движение оси становится горизонтальным, как и при регулярной прецессии, но скорость этого движения больше той, что нужна для регулярной прецессии. Траектория конца оси начинает отклоняться вверх. Поднявшись до исходной высоты, ось «замирает» – ее скорость обращается в нуль. Затем все повторяется сначала. Но теперь мы понимаем, что такое своеобразное поведение, когда конец оси движется по циклоидальной траектории, объясняется сложением двух движений – нутации волчка вокруг вектора момента импульса  $L_1$  с одновременной вынужденной прецессией этого вектора вокруг вертикали.

Для быстро вращающегося гироскопа  $L_1 \approx I_0 \omega_0$ , откуда для угловой скорости нутации следует выражение  $\Omega = L_1 / I_{\perp} \approx (I_0 / I_{\perp}) \omega_0$ . Таким образом, угловая скорость нутации  $\Omega$  имеет тот же порядок величины, что и угловая скорость  $\omega_0$  собственного вращения гироскопа, если только его продольный и поперечный моменты инерции не различаются слишком сильно.

При других начальных условиях сложение прецессии и нутации может породить траектории верхнего конца оси волчка петлеобразного и волнообразного (синусообразного) вида. И только тогда, когда начальная скорость как раз равна скорости оси при регулярной прецессии, волнообразная траектория полностью разглаживается, превращаясь в окружность, описываемую концом оси при регулярной прецессии (см. рис. 8).

Когда нутации малы, вынужденную прецессию называют псевдoreгулярной. Для быстро вращающихся гироскопов, применяемых в технике, псевдoreгулярная прецессия практически не отличается от регулярной. В таких случаях нутация проявляет себя как едва заметное мелкое и частое дрожание оси гироскопа. Кроме того, мелкомасштабные

нутации быстро затухают под действием сил трения, и псевдoreгулярная прецессия переходит в регулярную.

Компьютерная программа позволяет проследить затухание нутаций под действием трения и сглаживание траектории конца оси. На рис. 13 отчетливо видно, как изломы на этой траектории разглаживаются (синяя линия), и она постепенно приближается к окружности, соответствующей установившейся вынужденной прецессии. Эту окружность, показанную красной линией на рис. 13, вычерчивает конец вектора  $L_1$ . Когда нутации полностью затухнут и установится регулярная вынужденная прецессия, вектор  $L_1$  момента импульса, связанного с собственным вращением волчка, будет направлен вдоль оси волчка.

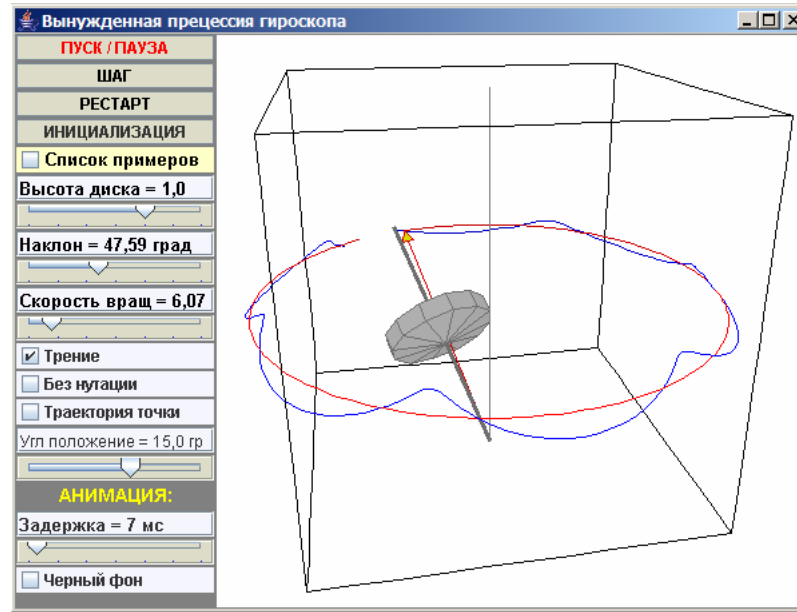


Рис. 13. Затухание нутаций под действием трения и постепенный переход псевдoreгулярной прецессии волчка в установившуюся регулярную прецессию.

Представление о том, по каким траекториям движутся точки волчка, не лежащие на оси симметрии, дает рис. 14.

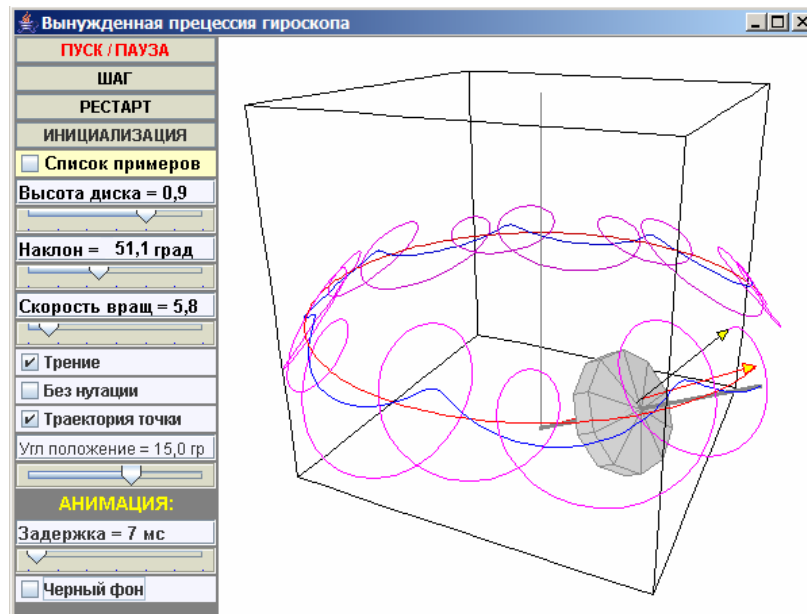


Рис. 14. Траектории оси волчка и точки, не лежащей на оси, при переходе псевдoreгулярной прецессии в установившуюся регулярную прецессию.

Жестко связанная с волчком стрелка («воткнутая» в тело волчка) образует небольшой угол (15 градусов) с его осью. Траектория острия этой стрелки лежит на сферической поверхности с центром в неподвижной точке опоры волчка. При регулярной прецессии (см. рис. 8) петлеобразная траектория стрелки получается как результат сложения вращения волчка вокруг собственной оси и равномерного движения этой оси по конусу прецессии. Все петли такой траектории одинаковы. При добавлении нутаций ось волчка совершает колебания около среднего положения, соответствующего конусу установившейся прецессии (см. рис. 14). Из-за таких колебаний оси волчка траектория конца стрелки заметно усложняется.

## ***Управление программой***

Программа позволяет изменять параметры моделируемой системы и условия наблюдения. Для удобства наблюдения изображение в окне можно поворачивать вокруг вертикальной и горизонтальной осей – вращать куб, в центре которого находится волчок. Этим достигается возможность смотреть на изображение трехмерных объектов с разных точек, например, сбоку, сверху или снизу. Для изменения точки зрения нужно привести указатель мыши в пределы окна, нажать левую кнопку и, не отпуская ее, перемещать («перетаскивать») указатель в ту или иную сторону, добиваясь наиболее удобного для наблюдения расположения осей координат и объектов на экране. Если при этом одновременно удерживать нажатой кнопку «Control» на клавиатуре, то мышью можно сдвигать изображение в желаемом направлении. Если же удерживать нажатой кнопку «Shift», то при перемещении указателя мыши будет изменяться масштаб изображения – предметы будут приближаться либо удаляться от наблюдателя.

Вращение волчка можно отображать в удобном для наблюдения масштабе времени. Изменение временного масштаба достигается введением задержки, которую можно изменить с помощью движка в нижней части панели управления. Назначение других органов управления на этой панели интуитивно понятно. Самая верхняя кнопка служит для пуска и приостановки моделирования. Вторая кнопка позволяет выполнять моделирование пошагово. Третья кнопка восстанавливает начальные условия, а четвертая – задаваемые по умолчанию значения параметров.

При первом знакомстве с программой можно не утруждать себя вводом параметров, а ограничиться выбором заранее заготовленных примеров из предлагаемого списка. Этот список можно открыть, поставив «галочку» в соответствующем боксе на панели управления. Для детального изучения вынужденной прецессии следует проделать моделирование при разных значениях параметров. Изменять параметры можно перемещением движков на панели управления, либо вводя нужные значения с клавиатуры. Предварительно нужно приостановить моделирование кнопкой «Пуск/Пауза». При вводе какого-либо параметра с клавиатуры поле ввода становится ярко желтым. Завершать ввод нужно нажатием клавиши «Enter», при этом поле ввода принимает прежний цвет.

Инертные свойства гироскопа определяются продольным и поперечным моментами инерции относительно осей, проходящих через точку опоры. В программе момент инерции относительно поперечной оси можно изменять перемещением диска, т.е. изменением расстояния от точки опоры до центра масс (параметр «Высота диска»). С увеличением высоты диска возрастает угловая скорость вынужденной прецессии и увеличивается отношение периода нутаций к периоду собственного вращения гироскопа. Программа допускает изменение значений расстояния от точки опоры до центра масс в пределах от 0,5 до 1,25 (в относительных единицах).

Еще один параметр, который можно изменять в программе – это наклон оси гироскопа, т.е. угол, который ось волчка образует с вертикалью. На панели управления он обозначен как «Наклон». Значение угла наклона нужно вводить в градусах. Допустимые зна-

чения лежат в интервале от 0 до 120 градусов. Величину угловой скорости собственного вращения гироскопа можно изменять в пределах от 4,0 до 20,0 (в относительных единицах, параметр «Скорость вращения»). Чтобы программа отображала влияние трения на поведение гироскопа, нужно поставить «флажок» в боксе «Трение».

Как уже было сказано выше, программа моделирует поведение гироскопа для начальных условий, соответствующих освобождению оси с нулевой начальной скоростью. При этом неизбежно возникает нутация. Но если поставить «флажок» в боксе «Без нутации», то будут заданы начальные условия, при которых сразу будет происходить регулярная прецессия без нутации.

Чтобы включить построение траектории какой-либо точки волчка, нужно выбрать положение этой точки относительно оси волчка (ввести в градусах значение параметра «Угл. положение») и поставить «флажок» в боксе «Траектория точки». Если снять «флажок» в самом нижнем боксе панели управления, можно сделать светлым фон окна, в котором программа отображает движение гироскопа.

### **Дополнение. Альтернативное объяснение вынужденной прецессии гироскопа**

Поведение волчка, совершающего вынужденную прецессию под действием внешних сил, кажется необычным, противоречащим нашей интуиции. Для более глубокого понимания этого явления полезно понять происхождение вынужденной прецессии, непосредственно рассматривая действующие на волчок внешние силы, не прибегая к уравнению моментов (1), т.е. к основному уравнению динамики вращения твердого тела.

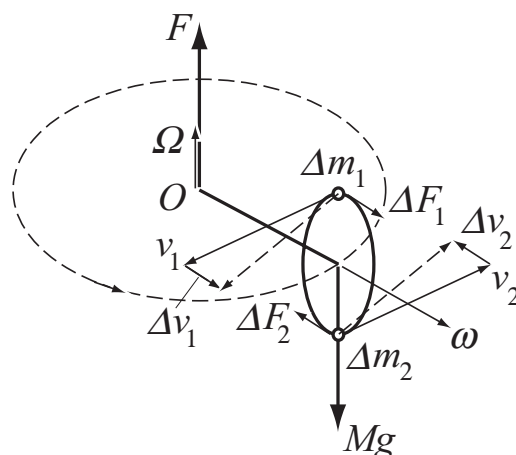


Рис. 15. К объяснению вынужденной прецессии колеса с горизонтальной осью.

Рассмотрим для определенности велосипедное колесо, один конец оси которого подвешен или шарнирно закреплен (точка  $O$  на рис. 15). Колесо приведено в быстрое вращение с угловой скоростью  $\omega$  вокруг собственной оси (ориентированной горизонтально). Под действием силы тяжести ось колеса не падает, а сохраняет горизонтальное положение, медленно поворачиваясь вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\Omega$ . Чтобы понять происхождение этой прецессии, рассмотрим два элемента обода колеса  $\Delta m_1$  и  $\Delta m_2$ .

На колесо действует сила тяжести  $Mg$ , которую можно считать приложенной в центре масс, и сила реакции, приложенная в точке опоры  $O$ . На рис. 15 показана только вертикальная составляющая  $F$  этой силы реакции. Через жесткую конструкцию системы (через ось и спицы колеса) эти внешние силы передаются рассматриваемым элементам обода  $\Delta m_1$  и  $\Delta m_2$  в виде показанных на рис. 15 элементарных сил  $\Delta F_1$  и  $\Delta F_2$ . Силы  $\Delta F_1$  и  $\Delta F_2$  направлены горизонтально, и их действие в течение короткого промежутка времени  $\Delta t$ , в со-

ответствии со вторым законом Ньютона, сообщает элементарные приращения  $\Delta m \Delta v_1$  и  $\Delta m \Delta v_2$  импульсам рассматриваемых элементов обода  $\Delta m_1$  и  $\Delta m_2$ . Эти приращения импульсов и соответствующие им приращения скоростей  $\Delta v_1$  и  $\Delta v_2$  направлены горизонтально, как и вызывающие их силы  $\Delta F_1$  и  $\Delta F_2$  (см. рис. 15).

Но благодаря вращению колеса вокруг собственной оси элементы обода  $\Delta m_1$  и  $\Delta m_2$  уже движутся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  (см. рис. 15), направленными по касательным к ободу. Складывая векторно скорости  $v_1$  и  $v_2$  с соответствующими приращениями  $\Delta v_1$  и  $\Delta v_2$ , получаем новые векторы скоростей, с которыми рассматриваемые элементы обода  $\Delta m_1$  и  $\Delta m_2$  движутся спустя короткий промежуток времени  $\Delta t$ . Новые векторы скоростей показаны штриховыми линиями на рис. 15. Такие изменения скоростей верхней и нижней точек обода означают, что под действием внешних сил за промежуток времени  $\Delta t$  произошел поворот плоскости колеса на небольшой угол вокруг вертикальной оси. Постепенный поворот плоскости колеса и объясняет наблюдаемую прецессию. Во время прецессии центр масс колеса движется по окружности, которая показана штриховой линией на рис. 15. Центробежное ускорение центра масс обеспечивается горизонтальной составляющей силы реакции, действующей на ось колеса в точке опоры  $O$ . Эта составляющая силы реакции на рисунке не показана.

Описанный здесь простой демонстрационный опыт с раскрученным вокруг оси велосипедным колесом, подвешенным за один конец оси, производит сильное впечатление. Поведение колеса со всей очевидностью противоречит нашим интуитивным представлениям: ось колеса поворачивается в направлении, перпендикулярном ожидаемому. Чтобы лучше прочувствовать это, можно несколько видоизменить опыт. Вместо того, чтобы подвешивать ось раскрученного колеса за один конец, будем просто держать ось в руках. Сделаем попытку повернуть ось в каком-либо направлении, скажем, перевести из горизонтального положения в вертикальное. Действуя по интуиции, мы руками приложим для этого к оси колеса силы в вертикальной плоскости. Но под действием этих сил колесо неожиданно начнет вырываться из рук, поворачиваясь в горизонтальной плоскости. Лишь после некоторой тренировки мы поймем, что для достижения поставленной цели – перевода оси из горизонтального положения в вертикальное – нужно приложить к оси силы, лежащие в горизонтальной плоскости. Только под действием таких сил ось колеса начнет поворачиваться в вертикальной плоскости (т.е. будет прецессировать вокруг горизонтальной оси).