
Московский физико-технический институт
(технический университет)
Санкт-Петербургский государственный университет

Е. И. Бутиков

ЛАБОРАТОРИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Москва, Санкт-Петербург

2003

Оглавление

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	3
1. Собственные колебания линейного торсионного осциллятора	3
1.2.1 Колебания в отсутствие трения	3
1.2.2 Затухающие собственные колебания	4
1.2.3 Неколебательное движение осциллятора	5
2. Осциллятор с сухим и вязким трением	7
1.2.1 Затухание под действием сухого трения	7
1.2.2 Влияние вязкого трения	8
3. Колебания и перевороты жесткого маятника	10
1.2.1 Малые колебания маятника	10
1.2.2 Колебания с большими амплитудами	11
1.2.3 Перевороты и вращения маятника	14
4. Вынужденные колебания линейного осциллятора	16
1.2.1 Установившиеся вынужденные колебания	16
1.2.2 Переходные процессы	18
5. Осциллятор с несинусоидальной внешней силой	21
1.2.1 Резонансное возбуждение осциллятора	21
1.2.2 Нерезонансные вынужденные колебания	22
6. Параметрическое возбуждение линейного осциллятора	25
1.2.1 Основной параметрический резонанс	25
1.2.2 Ручное управление параметром	27
1.2.3 Параметрические резонансы и интервалы неустойчивости высоких порядков ($n > 1$)	28
7. Параметрические колебания при плавной модуляции параметра линейного осциллятора	31
1.2.1 Основной параметрический резонанс	31
1.2.2 Основной частотный интервал параметрического резонанса	32
1.2.3 Параметрический резонанс второго порядка	33

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ – ЗАДАЧИ

1. Собственные колебания линейного осциллятора

1.2.1 Колебания в отсутствие трения

1.1 **Начальные условия и форма графиков.** В отсутствие трения линейный осциллятор совершает незатухающее гармоническое колебание, характеризуемое чисто синусоидальной зависимостью обобщенной координаты (угла отклонения) и обобщенной скорости (угловой скорости) от времени.

(а) Какой тип начальных условий приводит к чисто косинусоидальной зависимости угла отклонения от времени (т. е. к зависимости, выражаемой функцией $\varphi_0 \cos \omega_0 t$)?

(б) Допустим, что нужно получить колебания с угловой амплитудой 90° . Каким должно быть начальное отклонение $\varphi(0) = \varphi_0$ при нулевой начальной скорости ротора $\dot{\varphi}(0) = 0$? Какую начальную угловую скорость $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ нужно сообщить ротору в положении равновесия, чтобы получить колебания той же амплитуды 90° ? Напоминаем, что начальную угловую скорость Ω при вводе нужно выражать в единицах собственной частоты ω_0 . Проверьте Ваш расчет с помощью моделирующего эксперимента на компьютере.

(в) Какую начальную угловую скорость $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ нужно сообщить ротору, отклоненному на угол 45° из положения равновесия, чтобы получить колебания той же амплитуды 90° ?

1.2 **Максимальное отклонение и сохранение энергии.** Предположим, что осциллятор возбуждается из положения равновесия начальным толчком, который сообщает ротору угловую скорость $\Omega = 2\omega_0$. С помощью закона сохранения энергии рассчитайте максимальный угол, на который отклонится ротор из положения равновесия. Результат расчета проверьте в моделирующем эксперименте на компьютере. Обратите внимание на то, что компьютерная программа выполняет численное интегрирование дифференциального уравнения движения, “ничего не зная” о законе сохранения энергии.

1.3 **Фазовая траектория и начальные условия.** Сопоставьте движение изображающей точки вдоль фазовой траектории консервативного осциллятора с графиками зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости. Расположение графиков на экране компьютера (когда открыто окно “Фазовая траектория”) особенно удобно для такого сопоставления.

(а) Как изменится фазовая траектория, если изменить начальные условия? Зависит ли направление движения изображающей точки по фазовой траектории от начальных условий?

(б) Возможно ли, чтобы фазовые траектории для разных начальных условий оказались совпадающими? Если да, то каким требованиям должны удовлетворять начальные условия для такого совпадения фазовых траекторий?

1.4 Эллиптическая и круговая формы фазовой траектории линейного осциллятора.

(а) Докажите аналитически, что фазовая траектория консервативного линейного осциллятора представляет собой эллипс с центром в начале координат фазовой плоскости. Воспользуйтесь общим решением дифференциального уравнения консервативного осциллятора. Чему равны полуоси этого эллипса?

(б) Покажите, что эллиптическая форма фазовой траектории линейного консервативного осциллятора непосредственно следует из закона сохранения энергии.

(в) При каком масштабе по оси ординат фазовой плоскости (по оси угловой скорости) фазовая траектория будет окружностью? С какой угловой скоростью движется изображающая точка по этой окружности при колебаниях осциллятора? Зависит ли угловая скорость точки от энергии осциллятора?

1.5 Фазовая траектория и энергетические превращения. Сопоставьте движение изображающей точки по фазовой траектории с графиком зависимости потенциальной энергии от угла отклонения ротора. Взаимное расположение фазовой плоскости и потенциальной ямы осциллятора в окне “Превращения энергии” компьютерной программы особенно удобно для выполнения такого сопоставления. Особое внимание обратите на положение точек максимального отклонения в параболической потенциальной яме и на фазовой плоскости. Почему в этих точках полная энергия осциллятора совпадает с потенциальной энергией пружины? Чему равны значения потенциальной и кинетической энергий в точках поворота и в положении равновесия при колебаниях, возбуждаемых начальными условиями $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \Omega$? Чему равны значения угла отклонения φ_{\max} в точках поворота?

1.6 Форма и частота колебаний кинетической и потенциальной энергий. Изучите графики зависимости от времени кинетической и потенциальной энергий осциллятора, совершающего колебания в отсутствие трения.

(а) Что можно сказать о максимальных и средних значениях каждого из видов энергии? Сопоставьте эти графики с графиками угла отклонения и угловой скорости. Взаимное расположение графиков в окне “Превращения энергии” особенно удобно для такого сопоставления.

(б) С какой частотой и в каких пределах происходят колебания каждого из видов энергии?

1.2.2 Затухающие собственные колебания

2.1 Последовательность максимальных отклонений. При действии слабой силы вязкого трения последовательность максимальных отклонений осциллятора, совершающего затухающие собственные колебания, образует убывающую геометрическую прогрессию: каждое максимальное отклонение равно предыдущему, умноженному на одно и то же число, меньшее единицы: $\exp(-\gamma T_0) \approx 1 - \gamma T_0$.

(а) Рассчитайте значение добротности осциллятора, при котором амплитуда колебаний уменьшается вдвое через каждые два цикла колебаний. Введите это значение и проверьте закономерность убывания максимальных отклонений в моделирующем эксперименте. Зависит ли эта закономерность от способа возбуждения собственных колебаний (т. е. от начальных условий)?

(б) Оцените, на сколько процентов увеличивается период колебаний при этом значении добротности (по сравнению с периодом T_0 в отсутствие трения). Можно ли заметить такое увеличение периода колебаний в моделирующем эксперименте? Метки времени на графиках соответствуют целому числу периодов $T_0 = 2\pi/\omega_0$ в отсутствие трения.

2.2* Максимальное отклонение после возбуждения начальным толчком. Представьте, что колебания осциллятора возбуждаются начальным толчком, в результате кото-

рого маховик в положении равновесия получает угловую скорость $2\omega_0$. Добротность осциллятора $Q = 5$.

- (а) Рассчитайте первое максимальное отклонение маховика.
- (б) Каким будет следующее максимальное отклонение в противоположную сторону? Проверьте свои ответы в моделирующем эксперименте на компьютере.

2.3 Сложные начальные условия.** Пусть колебания осциллятора возбуждаются сообщением ротору некоторой начальной скорости в отклоненном из равновесия положении.

(а) Допустим, что начальное отклонение ротора составляет 155° , а начальная угловая скорость равна $2\omega_0$. Добротность осциллятора $Q = 5$. Рассчитайте максимальное отклонение маховика из положения равновесия при колебаниях.

(б) Рассчитайте максимальное отклонение маховика из положения равновесия для осциллятора с $Q = 5$ при том же начальном отклонении в 155° , но при начальной скорости $-2\omega_0$.

(в) Пусть начальное отклонение ротора из положения равновесия составляет -155° . Какой должна быть начальная скорость, чтобы ротор отклонился от положения равновесия на такой же угол 155° в противоположную сторону? Добротность осциллятора $Q = 20$.

2.4* Фазовая траектория затухающих колебаний. Фазовая траектория затухающих собственных колебаний при $Q > 0.5$ представляет собой спираль, которая образована бесконечным числом постепенно сжимающихся витков вокруг фокуса, расположенного в начале координат фазовой плоскости. Этот фокус соответствует состоянию покоя в положении равновесия, к которому осциллятор асимптотически приближается.

(а) По какому закону уменьшается радиус этих витков по мере того, как фазовая траектория приближается к фокусу?

(б) Изменяется ли промежуток времени, в течение которого изображающая точка совершает один оборот вдоль очередного витка спирали, по мере уменьшения размера витков?

1.2.3 Неколебательное движение осциллятора

При достаточно сильном вязком трении ($Q \leq 0.5$) ротор осциллятора после начального возбуждения возвращается в положение равновесия без колебаний. В моделирующем эксперименте мы можем наблюдать, как в таких условиях стрелка асимптотически приближается с одной стороны к нулевому делению шкалы.

3.1* Неколебательное движение при критическом затухании. Исследуйте теоретически и экспериментально движение осциллятора в случае критического затухания, когда $\gamma = \omega_0$.

(а) Почему именно критическое затухание предпочтительно для измерительных приборов типа гальванометра с подвижной катушкой? Почему такие же требования предъявляются к системе упругой подвески кузова автомобиля?

(б) Рассчитайте максимальный угол отклонения из равновесия, если система с $Q = 0.5$ получает в положении равновесия начальную скорость $\Omega = 5\omega_0$.

(в) Сколько времени продолжается движение стрелки до этой точки максимального отклонения? Проверьте свои результаты в моделирующем эксперименте на компьютере. Обратите внимание, что стрелка приближается к положению равновесия с одной стороны, не пересекая средней точки шкалы.

3.2 Критическое затухание.

(а) Проверьте экспериментально, что значение $Q = 0.5$ ($\gamma = \omega_0$) действительно соответствует критическому затуханию. Чтобы убедиться в этом, покажите, что при немного боль-

шем значении Q (скажем, при $Q = 0.51$) стрелка возмущенного осциллятора действительно совершает сильно затухающие колебания с пересечением нулевого деления шкалы. Если ротор осциллятора с $Q = 0.51$ был отклонен из равновесия и отпущен без начальной скорости, то сколько времени пройдет пока он пересечет нулевое деление и начнет движение в обратную сторону (к положению равновесия)?

(б) Для осциллятора с критическим затуханием $Q = 0.5$ выразите константы C_1 и C_2 в общем решении $\varphi(t) = (C_1 t + C_2) \exp(-\gamma t)$ дифференциального уравнения через значения начального отклонения $\varphi(0) = \varphi_0$ и начальной скорости $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$.

(в) Возможно ли, чтобы движение системы с критическим затуханием происходило после первоначального возбуждения по чисто экспоненциальному закону? Если да, то какие начальные условия порождают такое движение? Какой вид имеет фазовая траектория такого движения? Проверьте свои ответы в эксперименте на компьютере.

(г) При каких начальных условиях ротор системы с критическим затуханием пересечет положение равновесия после первоначального возбуждения? Какой должна быть начальная угловая скорость ротора Ω при заданном начальном отклонении φ_0 для того, чтобы ротор пересек положение равновесия через промежуток времени $t = 3T_0$ после возбуждения (где $T_0 = 2\pi/\omega_0$ – период собственных колебаний в отсутствие трения)? Возможно ли повторное пересечение стрелкой нулевого деления шкалы?

3.3* Движение при сверхкритическом затухании.

(а) Выразите значения констант C_1 и C_2 в общем решении дифференциального уравнения для передемпфированной системы через произвольные значения начального отклонения $\varphi(0) = \varphi_0$ и начальной угловой скорости $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$.

(б) При каких начальных условиях последующее движение системы со сверхкритическим затуханием будет происходить по моноэкспоненциальному закону, т. е. будет характеризоваться единственной постоянной времени? Какие фазовые траектории соответствуют таким движениям?

(в) Объясните, почему при произвольных начальных условиях неколебательное движение маховика к положению равновесия происходит вообще говоря медленнее и требует большего времени, чем в случае критического затухания (для системы с тем же значением ω_0). Возможно ли, чтобы передемпфированная система пришла в состояние покоя в положении равновесия за меньшее время, чем система с критическим затуханием (при том же значении ω_0)? Если да, то при каких условиях возбуждения это произойдет?

(г) В чем заключается принципиальное отличие фазовых траекторий, соответствующих неколебательному движению, от фазовых траекторий затухающих колебаний?

(д) Возможно ли, чтобы ротор передемпфированной системы ($\gamma > \omega_0$) пересек положение равновесия после первоначального возбуждения? Если да, то при каких начальных условиях это произойдет? Возможно ли повторное пересечение положения равновесия?

2. Осциллятор с сухим и вязким трением

1.2.1 Затухание под действием сухого трения

1.2 Затухание под действием сухого трения при возбуждении колебаний начальным отклонением ротора из среднего положения. Чтобы отчетливее выявить роль сухого трения в затухании колебаний, выберите сравнительно большое значение угла φ_m , определяющего границы зоны застоя (скажем, от 15 до 20 градусов), и полное отсутствие вязкого трения. Такие условия сильно отличаются от ситуации, характерной для стрелочных измерительных приборов, которые конструируются так, чтобы зона застоя была бы по возможности более узкой, и в которых преднамеренно вносится вязкое трение, обеспечивающее сильное (близкое к критическому) затухание. В таком случае подвижная система прибора успокаивается за минимальное время, и, почти не совершая колебаний, останавливается очень близко к положению, в котором стрелка указывала бы на деление шкалы, соответствующее точному значению измеряемой величины. Здесь же мы намеренно выбираем условия так, чтобы в наибольшей мере выявить роль сухого трения.

(а) Что можно сказать о последовательности максимальных отклонений, если затухание вызвано исключительно сухим трением с идеализированной z-характеристикой? По какому закону происходит убывание максимальных отклонений? Как связаны между собой полуширина зоны застоя и разность последовательных максимальных отклонений в одну сторону?

(б) Пусть угол φ_m , определяющий полуширину зоны застоя, равен, скажем, 15 градусов, а начальное отклонение φ_0 составляет 160° при равной нулю начальной угловой скорости. Рассчитайте теоретически, в какой точке шкалы остановится стрелка после прекращения колебаний. Сколько полуэллипсов образуют фазовую траекторию этого движения, считая от начальной точки до точки полной остановки? Проверьте свои предсказания в моделирующем эксперименте на компьютере.

(в) Где на графике зависимости угловой скорости от времени расположены средние значения отрезков синусоид, описывающих колебания осциллятора на протяжении отдельных полуциклов между точками поворота? Обратите внимание на то, как эти отрезки синусоид переходят друг в друга и образуют непрерывный график затухающих колебаний.

(г) Обратите внимание на изломы графика зависимости угловой скорости от времени (эти изломы соответствуют моментам времени, в которые происходит изменение направления движения осциллятора). Какова причина этих изломов? Чем определяется разность углов наклона касательных к графику скорости справа и слева от этих точек?

1.3* Затухание колебаний под действием сухого трения после возбуждения осциллятора начальным толчком. Выберите начальные условия следующим образом: пусть начальное отклонение равно нулю, а начальная угловая скорость равна, скажем, $2\omega_0$ (где ω_0 – собственная частота осциллятора). Для полуширины зоны застоя примите, как и прежде, значение $\varphi_m = 15^\circ$.

(а) Рассчитайте теоретически максимальный отброс стрелки осциллятора.

(б) На какую точку шкалы укажет стрелка после полного прекращения колебаний? Сколько витков будет на полной фазовой траектории этих колебаний? Проверьте свой ответ в моделирующем эксперименте на компьютере.

1.4* Затухание колебаний под действием сухого трения при разных начальных условиях. Приняв прежнее значение $\varphi_m = 15^\circ$ для полуширины зоны застоя, рассчитайте угол, соответствующий максимальному отбросу стрелки, и окончательное ее положение на шкале после прекращения колебаний при более сложных начальных условиях:

(а) Начальный угол отклонения $\varphi(0) = 135^\circ$, начальная угловая скорость $\dot{\varphi}(0) = 1.5\omega_0$ (где ω_0 – собственная частота колебаний осциллятора).

(б) Начальный угол отклонения $\varphi(0) = -135^\circ$, начальная угловая скорость $\dot{\varphi}(0) = 1.5\omega_0$. Проверьте полученные Вами теоретические значения в моделирующем эксперименте на компьютере.

1.5* Рассеяние механической энергии осциллятора в случае сухого трения.

(а) График зависимости полной механической энергии осциллятора от угла отклонения состоит из прямолинейных отрезков, соединяющих склоны параболической потенциальной ямы (этот график можно получить в разделе компьютерной программы “Энергетические превращения”). Объясните, почему.

(б) Рассчитайте полный угловой путь (в градусах), который пройдет маховик осциллятора до полной остановки (до прекращения колебаний) после возбуждения колебаний осциллятора начальным толчком $\dot{\varphi}(0) = 2\omega_0$ из средней точки мертвой зоны, где ω_0 – собственная частота осциллятора). Полуширина мертвой зоны $\varphi_m = 10^\circ$.

1.6 Колебания в случае узкой зоны застоя. Выберите малое значение угла φ_m , характеризующего полуширину зоны застоя (менее 5°), и задайте начальное угловое отклонение $\varphi(0)$, во много раз превосходящее ширину $2\varphi_m$ зоны застоя.

(а) Сколько циклов колебаний совершит маховик до полной остановки?

(б) Когда совершается большое число колебаний, графики отчетливо показывают линейную закономерность убывания амплитуды колебаний и эквидистантный характер витков фазовой диаграммы. Что можно сказать в этом случае о закономерности убывания со временем полной механической энергии осциллятора, усредненной по периоду колебаний?

1.2.2 Влияние вязкого трения

2.1* Переход главной роли в затухании от вязкого к сухому трению. Когда затухание колебаний обусловлено одновременно как сухим, так и вязким трением, представляет интерес выяснить изменение характера затухания, когда основной вклад в затухание переходит от вязкого трения к сухому. Пусть угол φ_m , определяющий полуширину зоны застоя, составляет около 1 градуса, и пусть добротность Q , определяющая интенсивность вязкого трения, составляет около 30 . Пусть начальный угол отклонения равен 120° , а начальная угловая скорость равна нулю.

(а) Сухое или вязкое трение играет определяющую роль в затухании на начальной стадии колебаний?

(б) При каком значении амплитуды происходит изменение характера колебаний? Каким образом это изменение проявляется на графиках зависимости угла отклонения и угловой скорости от времени? На фазовой траектории?

2.2* Совместное действие сухого и вязкого трения. Пусть границы зоны застоя находятся при $\varphi_m = 10^\circ$, и пусть добротность $Q = 5$. Пусть начальная угловая скорость $\dot{\varphi}(0) = 2\omega_0$, и пусть начальное отклонение равно нулю.

(а) Рассчитайте максимальный угол отклонения стрелки осциллятора для приведенных параметров и начальных условий. Проверьте свой ответ в эксперименте.

(б) Какой вид трения (сухое или вязкое) преобладает на начальном этапе затухания колебаний?

(в)** Пусть границы зоны застоя определяются углами $\varphi_m = 10^\circ$. Пусть добротность Q равна 3 , начальное отклонение составляет 65° , начальная угловая скорость $-2\omega_0$. Рассчитайте максимальный угол отклонения стрелки с сторону, противоположную начальному отклонению. Проверьте свой ответ в эксперименте.

2.3 Сухое трение и критическое вязкое трение.

(а) Выберите значение добротности Q близкое к критическому значению 0.5, и исследуйте экспериментально характер затухания. Где в пределах зоны застоя наиболее вероятна остановка стрелки после прекращения колебаний, если добротность Q слегка превосходит критическое значение? Приведите физическое объяснение результатам своих наблюдений.

(б) Пусть вязкое трение характеризуется добротностью немного превышающей критическое значение, скажем, $Q = 0.51$. Осциллятор возбуждается начальным отклонением из положения равновесия. Оцените время (в единицах периода колебаний в отсутствие трения), которое пройдет до полного прекращения движения. Где произойдет полная остановка ротора? Проверьте результат своего расчета в моделирующем эксперименте.

(в) Где произойдет остановка стрелки, если добротность Q меньше, чем 0.5 (т. е. если система передемпфирована)? Зависит ли ответ от начальных условий?

3. Колебания и перевороты жесткого маятника

1.2.1 Малые колебания маятника

1.1 Амплитуда, фазовая траектория и энергия малых колебаний. При малых углах отклонения, когда $\sin \varphi \approx \varphi$, возвращающий момент силы тяжести приблизительно пропорционален углу отклонения от положения устойчивого равновесия, и маятник ведет себя подобно линейному осциллятору. В отсутствие трения он совершает простые гармонические колебания. При наличии слабого трения движение маятника можно рассматривать как почти гармоническое колебание с медленно убывающей амплитудой. Выберите полное отсутствие трения и задайте какие-либо начальные условия, обеспечивающие колебания малой амплитуды. Например, пусть начальное отклонение будет равно 30 градусам, а начальная угловая скорость равна нулю. В таком случае амплитуда колебаний составит 30 градусов.

(а) Чему равно максимальное значение скорости в этих колебаниях? Проверьте результат в моделирующем эксперименте.

(б) Какую начальную скорость нужно сообщить маятнику, находящемуся в положении равновесия ($\varphi(0) = 0$), чтобы получить колебания той же амплитуды (30 градусов)? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте. Напоминаем, что начальная угловая скорость должна задаваться при вводе в единицах угловой частоты ω_0 собственных малых колебаний маятника. Чем отличаются такие колебания от колебаний той же амплитуды, возбуждаемых начальным отклонением?

(в) Убедитесь, что при малых амплитудах графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости имеют форму, близкую к синусоидальной. Убедитесь также, что колебания скорости опережают по фазе колебания угла отклонения на четверть периода. Сопоставьте графики угла отклонения и угловой скорости с движением изображающей точки по фазовой плоскости. Какую форму имеет фазовая траектория малых колебаний маятника? При каком масштабе по оси ординат фазовая траектория малых колебаний будет изображаться окружностью на фазовой плоскости?

(г) Что можно сказать о зависимости от времени кинетической и потенциальной энергий маятника, совершающего малые колебания? Докажите, что средние по времени значения кинетической и потенциальной энергий (за период) приближенно одинаковы. Если амплитуда равна 30 градусам, то чему равно отношение полной энергии маятника E к максимально возможному значению потенциальной энергии E/E_{\max} ?

1.2* Период малых колебаний.

На графиках зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости, получаемых в моделирующей программе, деления на шкале времени (метки времени) показаны в естественных для маятника единицах, а именно, в единицах периода колебаний предельно малой амплитуды $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. Таким образом, промежутки между метками времени на осях равны T_0 .

(а) Обратите внимание, что при малых, но конечных амплитудах (скажем, около 30 градусов) период колебаний немного превышает значение T_0 . Судить об этом можно либо по графикам на экране, либо по показаниям таймера в разделе “Физическая система”. В последнем случае можно остановить моделирование (кнопкой “Пауза” или нажатием пробела) и прочитать показание таймера в момент, когда маятник совершит целое число циклов. Чтобы было удобно снимать дальнейшие показания таймера, во время паузы можно сбросить показания таймера кнопкой “Сброс таймера”. Попытайтесь измерить (в единицах T_0) период колебаний маятника для нескольких умеренных значений амплитуды.

(б) Какие моменты следует выбирать для снятия показаний таймера (для остановки и пуска моделирования) при экспериментальных измерениях периода колебаний: когда маятник

проходит через положение равновесия или когда он достигает положений наибольшего отклонения? Мотивируйте свой ответ. При выполнении измерений периода колебаний нужно снять показание таймера при прохождении маятником определенного положения (например, положения равновесия). Но практически невозможно зафиксировать показание таймера (остановить моделирование) точно в нужный момент. В этом заключается неизбежная причина погрешности измерений. Предложите способ измерения периода колебаний, при использовании которого можно добиться значительного уменьшения погрешности, которая обусловлена указанной причиной.

(в) Сравните экспериментально измеренные значения периода T для заданного значения амплитуды колебаний φ_0 со значениями периода, рассчитанными по приближенной теоретической формуле

$$T = T_0(1 + \varphi_0^2/16), \quad (1.1)$$

где амплитуда φ_0 выражена в радианах. Составьте таблицу экспериментальных и теоретических значений периода для амплитуд 30, 45, 60, 90, 120, 135 и 150 градусов. Найдите максимальное значение амплитуды φ_0 , вплоть до которого ошибка теоретической формулы (1.1) не превышает одного процента. Какую ошибку дает эта формула при амплитуде 45 градусов? Как можно получить эту приближенную теоретическую формулу? (Приведите ее вывод в отчете.)

1.3 Затухание малых колебаний.

(а) Покажите теоретически, что малое трение приводит к экспоненциальному затуханию собственных колебаний маятника. При каком значении добротности Q амплитуда уменьшается вдвое за четыре полных цикла колебаний? Введите рассчитанное значение добротности и проверьте результат в моделирующем эксперименте на компьютере.

(б) Убедитесь, что в случае очень сильного вязкого трения, характеризуемого значениями добротности Q ниже критического значения 0.5, выведенный из положения равновесия маятник возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. Может ли маятник пересечь положение равновесия? В чем заключается основное качественное различие фазовых траекторий маятника в случаях слабого и очень сильного затухания?

1.2.2 Колебания с большими амплитудами

2.1 Сравнение маятника с линейным осциллятором.

При больших углах отклонения от положения равновесия сильнее проявляется нелинейный характер зависимости возвращающего момента силы тяжести от угла отклонения φ . Поскольку $\sin \varphi < \varphi$, увеличение возвращающего момента с ростом угла отклонения у маятника происходит в меньшей степени, чем у линейного осциллятора. Поэтому маятник относится к нелинейным колебательным системам с “мягкой” возвращающей силой.

(а) Каким образом упомянутое различие между маятником и линейным осциллятором проявляет себя в графиках зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости? Как эти различия проявляются на фазовой траектории? Приведите качественное физическое объяснение этих различий.

(б) Какие различия между маятником и линейным осциллятором можно наблюдать в характере превращений энергии при колебаниях? Сопоставьте фазовую траекторию маятника с графиком потенциальной энергии от угла отклонения (с потенциальной ямой маятника). Для такого сопоставления особенно удобно использовать взаимное расположение фазовой плоскости и потенциальной ямы на экране компьютера в разделе “Превращения энергии” (этот раздел можно открыть, выбирая соответствующий пункт из меню “Экран”). Обратите внимание на взаимное расположение точек поворота (точек максимальных отклонений) на

фазовой плоскости и в потенциальной яме маятника. При заданных начальных условиях ($\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \Omega$), чему равны значения потенциальной и кинетической энергий маятника в крайних точках и в положении равновесия (в отсутствие трения)?

2.2* Колебания маятника с большими амплитудами.

(а) Исследуйте экспериментально большие колебания маятника в отсутствие трения. Обратите внимание на строго периодический характер графиков динамических переменных при этих отчетливо несинусоидальных колебаниях в консервативной нелинейной системе. Когда амплитуда колебаний несколько превышает 90 градусов, график зависимости угловой скорости от времени имеет пилообразную форму с почти прямолинейными равносоставленными треугольными зубцами. Объясните, почему. В этом случае соответствующий график зависимости угла отклонения от времени состоит из зубцов почти параболической формы, в противоположность синусоидальной форме при колебаниях с малой амплитудой. Объясните параболическую форму зубцов в этом случае. Обратите внимание на возрастание периода колебаний при увеличении амплитуды (соседние деления на шкале времени разделены интервалом T_0 , равным периоду предельно малых колебаний маятника).

(б) Обратите внимание на то, как замкнутые фазовые траектории колебаний консервативного маятника вытягиваются в горизонтальном направлении по мере увеличения энергии маятника. Объясните, почему наблюдается (возрастающее с энергией) отличие этих фазовых траекторий от эллиптических (или круговых) фазовых траекторий линейного осциллятора. Для такого объяснения воспользуйтесь сравнением параболической потенциальной ямы линейного осциллятора с синусоидальной потенциальной ямой маятника. Примите, что вблизи дна обе потенциальные ямы имеют одинаковую кривизну, т. е. что период T_0 малых колебаний маятника равен периоду колебаний соответствующего линейного осциллятора. Напомним, что период колебаний линейного осциллятора не зависит от амплитуды (и энергии).

(в) При больших амплитудах колебаний маятник сравнительно быстро проходит окрестность положения равновесия (дно потенциальной ямы), затем медленно взбирается на пологий, почти горизонтальный склон верхней части синусоидального барьера, разделяющего соседние потенциальные ямы, а затем также медленно сползает с него. Таким образом, маятник проводит при больших отклонениях гораздо больше времени, чем линейный осциллятор, параболические берега потенциальной ямы которого имеют неуклонно возрастающую крутизну. Основываясь на сравнении формы этих потенциальных ям, объясните, почему средние за период колебаний значения потенциальной и кинетической энергии маятника не равны друг другу (в то время как у линейного осциллятора средние за период колебаний значения кинетической и потенциальной энергии одинаковы).

(г)* Тщательно изучите экспериментально интересный случай колебаний с амплитудой, близкой к 180° . Задайте начальное отклонение 179.999° при нулевой начальной скорости. Маятник довольно долго находится с одной стороны перевернутого неустойчивого положения равновесия, затем постепенно ускоряется и сравнительно быстро проходит через дно потенциальной ямы (через устойчивое положение равновесия), затем медленно подходит к перевернутому положению с другой стороны, и надолго застревает в таком положении. Сравните время, в течение которого маятник проходит почти весь круговой путь (за исключением малой окрестности перевернутого положения) от одной стороны перевернутого положения до другой, с периодом малых колебаний маятника. Другими словами, оцените длительность уединенного импульса на графике зависимости угловой скорости от времени. Или, что то же самое, оцените длительность крутого почти вертикального участка (размытие ступеньки) на почти прямоугольном графике зависимости угла отклонения от времени.

(д)* Попробуйте определить, каким фактором определяется ширина (длительность) этих почти прямоугольных зубцов графика временной зависимости угла отклонения. Или, что то же самое, каким фактором определяется интервал времени между двумя последовательными

импульсами на графике зависимости угловой скорости от времени. Иначе говоря, попытайтесь определить физическую причину, определяющую полный период таких необычных колебаний консервативного маятника. (Подсказка: измерьте период колебаний последовательно для значений начального отклонения 179.999° , 179.990° , и 179.900° градусов, каждый раз при нулевой начальной скорости.

(е)** Попытайтесь оценить теоретически промежуток времени, в течение которого маятник достигает положения крайнего отклонения 179.99° при возбуждении из положения равновесия сообщением начальной угловой скорости, необходимой для достижения такого максимального отклонения. Полученный результат используйте для оценки периода колебаний маятника с амплитудой 179.99° . Сравните Вашу теоретическую оценку с периодом колебаний, измеренным в моделирующем эксперименте.

(ж)** Обратите внимание на характер превращений энергии в рассмотренном выше движении. Полная энергия маятника E в этом движении почти равна высоте $2mga$ потенциального барьера, т. е. значению потенциальной энергии маятника в перевернутом положении ($\varphi = \pm\pi$). Большую часть периода таких колебаний маятник проводит в окрестности перевернутого положения, так как он очень медленно движется и медленно ускоряется вблизи перевернутого положения. Поэтому среднее за полный период таких колебаний значение потенциальной энергии маятника много больше среднего значения его кинетической энергии. В таких колебаниях потенциальная энергия маятника превращается в кинетическую энергию лишь на короткое время, пока маятник быстро проходит через нижнее положение равновесия (через минимум потенциальной энергии). Попытайтесь сделать теоретическую оценку отношения средних (за период колебаний) значений потенциальной и кинетической энергии для амплитуды 179.99 градусов.

2.3* Движение вдоль сепаратрисы.

(а) Когда маятнику задают начальное отклонение, близкое к 180 градусам, при нулевой начальной скорости, фазовая траектория результирующего движения почти совпадает с сепаратрисой $\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2)$. Точка, изображающая механическое состояние маятника в фазовой плоскости, быстро проходит вдоль нижней ветви сепаратрисы, надолго застревает около левой седловой точки $(-\pi, 0)$, а затем возвращается вдоль верхней ветви сепаратрисы. Как нужно задать начальные условия, чтобы изображающая точка сначала проходила бы вдоль верхней ветви сепаратрисы, а затем вдоль нижней ветви? Только вдоль верхней ветви?

(б) Какую начальную скорость Ω (в единицах ω_0) нужно сообщить маятнику в нижнем положении равновесия для того, чтобы изображающая точка двигалась вдоль сепаратрисы фазовой плоскости? Какую начальную скорость нужно для этого сообщить маятнику, отклоненному из положения равновесия на угол 60 градусов? 90° ? -90° ? 120° ? Проверьте свои результаты в моделирующем эксперименте.

(в) Для лимитационного движения (движения по сепаратрисе) рассчитайте интервал времени τ , на протяжении которого кинетическая энергия маятника превосходит его потенциальную энергию. Или, что то же самое, найдите время, в течение которого маятник проходит от одного горизонтального положения до другого, совершая круговой путь от одной стороны перевернутого положения до другой через нижнее положение равновесия. Выразите этот интервал времени в единицах T_0 периода малых колебаний маятника. Проверьте свой теоретический результат в моделирующем эксперименте на компьютере.

2.4 Колебания с большими амплитудами при наличии трения.

(а) Исследуйте влияние вязкого трения на колебания с большими амплитудами. Начните со случая сравнительно слабого трения (скажем, $Q \approx 20$). Обратите внимание на изменение формы графиков по мере того, как механическая энергия маятника и амплитуда постепенно уменьшаются из-за трения. В частности, обратите внимание на то, как первоначально пилообразная кривая графика угловой скорости (с ее острыми почти прямолинейными треугольни-

ми зубцами) и первоначальная кривая графика угла отклонения (с почти параболическими зубцами) постепенно эволюционируют, приближаясь по форме к синусоидальным кривым, характерным для гармонического осциллятора.

(б) Под влиянием вязкого трения изменяется топология фазовых траекторий маятника. Вместо замкнутых кривых, соответствующих строго периодическим колебаниям консервативного маятника, мы видим скручивающиеся спирали, совершающие бесконечное число постепенно сжимающихся витков вокруг фокуса, расположенного в начале координат фазовой плоскости. Обратите внимание на то, как постепенно изменяется форма витков фазовой траектории по мере того, как они отдаляются от сепаратрисы. Приведите качественное объяснение наблюдаемым изменениям. Напомним, что в случае линейного осциллятора вязкое трение приводит к сжатию витков фазовой траектории, при котором сохраняется геометрическое подобие витков в процессе приближения фазовой кривой к началу координат.

(в) Работая в окне программы “Превращения энергии”, обратите внимание на то, как скорость диссипации механической энергии зависит от положения изображающей точки в потенциальной яме маятника. В какой момент на протяжении цикла колебаний скорость диссипации механической энергии максимальна? Мотивируйте свой ответ.

(г)** С помощью закона сохранения энергии рассчитайте минимальное значение начальной угловой скорости, которую нужно сообщить маятнику в нижнем положении равновесия для того, чтобы он достиг перевернутого положения (неустойчивого равновесия) в случае полного отсутствия трения, и при слабом трении, когда добротность Q равна 20. Какую начальную скорость нужно сообщить маятнику для достижения перевернутого положения, если первоначально он был отклонен из положения устойчивого равновесия на угол 60° градусов? На угол 90° градусов?

1.2.3 Перевороты и вращения маятника

Маятник вращается (совершает полные обороты), если его полная энергия превышает $2mga$, т. е. превышает максимальное значение потенциальной энергии, соответствующее перевернутому положению. Влияние поля тяжести сказывается в том, что вращение маятника в вертикальной плоскости происходит неравномерно: угловая скорость максимальна в те моменты, когда маятник проходит через нижнее положение устойчивого равновесия, и минимальна, когда он проходит через верхнее положение неустойчивого равновесия (при полном отсутствии трения).

3.1 Угловая скорость при переворотах маятника.

(а) Выберите полное отсутствие трения. Рассчитайте минимальное значение начальной угловой скорости, которую нужно сообщить маятнику в нижнем положении равновесия, чтобы маятник совершил полный переворот. Обратите внимание на характер графика зависимости угловой скорости от времени при движении с начальной скоростью, превышающей это минимальное значение: когда маятник совершает перевороты, его угловая скорость изменяется периодически (т. е. угловая скорость осциллирует со временем), но знак угловой скорости (направление вращения) не изменяется, и график не пересекает ось времени.

(б)* Как изменится период этих колебаний угловой скорости, если увеличить начальную скорость, сообщаемую маятнику при возбуждении? Рассчитайте минимальное значение угловой скорости при переворотах маятника для заданного значения Ω начальной угловой скорости. Найдите асимптотическое поведение периода вращения от начальной угловой скорости $T(\Omega)$ для значений полной энергии E , значительно превышающих потенциальную энергию перевернутого маятника ($E \gg 2mga$). Сделайте теоретическую оценку периода вращения маятника, которому в нижней точке сообщена угловая скорость, равная 3 единицам угловой частоты малых колебаний. Проверьте результат расчета в моделирующем эксперименте.

(в) Какие начальные условия нужно ввести в моделирующем эксперименте для того чтобы получить фазовую траекторию, проходящую над сепаратрисой? Расположенную ниже сепаратрисы? Совпадающую с верхней или с нижней ветвью сепаратрисы?

3.2* Периоды переворотов и больших колебаний.

(а) Особенно интересно сравнить период переворотов маятника в отсутствие трения с периодом колебаний того же консервативного маятника в случае, когда полная энергия E близка к максимально возможному значению потенциальной энергии $E_{\max} = 2mga$. В этом случае фазовые траектории переворотов и колебаний проходят в окрестности сепаратрисы. Используя моделирующий эксперимент, выполните измерение периода для двух значений полной энергии E , которые слегка отличаются от E_{\max} на одну и ту же величину в большую и меньшую сторону. Например, возьмите сначала $E/E_{\max} = 0.9999$ а затем $E/E_{\max} = 1.0001$.

Для выполнения подобных измерений удобно воспользоваться окном программы “Фазовый портрет маятника”. В этом окне моделирование движения маятника (при заданном значении полной энергии) и построение графиков останавливается автоматически по завершении одного цикла движения маятника. Поэтому окончательное показание таймера дает интересующее нас значение периода данного движения (в единицах периода T_0 предельно малых колебаний), и не возникает дополнительных ошибок, связанных с трудностями ручной остановки таймера в нужный момент. В правом нижнем углу окна находится таблица, в которую автоматически заносятся значения амплитуд и периодов T , получаемые при выполнении моделирующих экспериментов при заданных Вами значениях полной энергии E . С помощью этой таблицы можно получить количественную зависимость периода от энергии $T(E)$.

(б)* Чему равно отношение измеренных Вами периодов движения маятника для этих двух случаев? Как можно объяснить наблюдаемое отношение периодов?

(в)** Попытайтесь получить теоретическую оценку периода колебаний маятника с энергией $E/E_{\max} = 0.9999$, и периода вращения с энергией $E/E_{\max} = 1.0001$.

(г)** Когда полная энергия маятника E превышает высоту потенциального барьера $E_{\max} = 2mga$, период вращения T быстро убывает при увеличении полной энергии маятника. Найдите асимптотическое поведение периода $T(E)$ при стремлении энергии E к бесконечности.

3.3* Перевороты маятника при наличии трения.

(а) Изучите экспериментально вращение маятника при наличии слабого вязкого трения. Обратите внимание на то, как фазовая траектория постепенно приближается к сепаратрисе. Какое значение имеет полная энергия маятника в тот момент, когда фазовая траектория пересекает сепаратрису? Обратите внимание на то, что до пересечения сепаратрисы, пока маятник совершает полные перевороты, кинетическая энергия и угловая скорость нигде не обращаются в нуль.

(б)** Используя закон сохранения энергии, оцените минимальную начальную угловую скорость, которую необходимо сообщить маятнику в нижнем положении равновесия для того чтобы он совершил полный оборот. Добротность маятника $Q = 20$. Какая начальная угловая скорость нужна для того чтобы маятник совершил два оборота? Проверьте свои расчеты в моделирующем эксперименте. Методом проб и ошибок уточните полученную оценку необходимой минимальной скорости. Объясните наблюдаемое небольшое различие теоретического и экспериментального значений минимальной начальной скорости.

4. Вынужденные колебания линейного осциллятора

1.2.1 Установившиеся вынужденные колебания

При изучении установившихся колебаний с помощью моделирующей компьютерной программы нет необходимости дожидаться, пока произойдет установление колебаний. Для того, чтобы сразу происходило моделирование установившихся колебаний, достаточно выбрать опцию “Установившиеся колебания” в панели “Условия моделирования”. При этом программа автоматически выбирает начальные условия $\varphi(0) = a \sin \delta$ и $\dot{\varphi}(0) = a\omega \cos \delta$, обеспечивающие отсутствие переходного процесса, независимо от введенных Вами начальных условий. Необходимые значения амплитуды a и сдвига фаз δ программа рассчитывает на основе выражений (4.8) из учебного пособия “Физика колебаний”, используя введенные Вами значения вынуждающей частоты ω и добротности осциллятора Q .

1.1 Установившиеся вынужденные колебания в отсутствие трения.

(а) Строго говоря, в отсутствие трения переходный процесс продолжается бесконечно долго, так что установившиеся колебания неизменной амплитуды возможны только при указанных выше начальных условиях. Имеет ли какой-либо физический смысл аналитическое решение $\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta)$ с $a = \phi_0 \omega_0^2 / (\omega_0^2 - \omega^2)$, описывающее установившиеся колебания при $\gamma = 0$, для каких-либо иных начальных условий? Можно ли применять это решение к реальным физическим системам? Если да, то при каких условиях возможно наблюдать описываемое этим решением движение в реальных системах?

(б) Убедитесь на опыте, что при вынуждающих частотах, меньших собственной частоты осциллятора (т. е. при $\omega < \omega_0$), установившиеся вынужденные колебания происходят в одинаковой фазе с колебаниями возбуждающего шатуна. При какой частоте амплитуда колебаний маховика будет в два раза превосходить амплитуду шатуна? Рассчитайте эту частоту и проверьте свой результат с помощью моделирующего эксперимента.

(в) Убедитесь, что при вынуждающих частотах, больших чем собственная частота (т. е. при $\omega > \omega_0$), колебания маховика происходят в противофазе с колебаниями возбуждающего шатуна. При каком значении частоты ($\omega > \omega_0$) амплитуда маховика опять будет вдвое превосходить амплитуду шатуна? При какой частоте амплитуды маховика и шатуна будут равны? При какой частоте амплитуда вынужденных колебаний маховика будет вдвое меньше амплитуды шатуна? Проверьте свои ответы в эксперименте.

1.2* Превращения энергии при установившихся вынужденных колебаниях осциллятора.

(а) Используя графики потенциальной, кинетической и полной механической энергии, выясните, во время каких частей цикла вынужденных колебаний энергия передается от шатуна (точнее, от внешнего источника, обеспечивающего заданное принудительное движение шатуна) осциллятору. Приведите физическое объяснение наблюдаемому направлению переноса энергии. На протяжении каких частей цикла происходит обратная передача энергии от осциллятора к внешнему источнику?

(б) В случае кинематического возбуждения вынужденных колебаний, чему равно отношение средних значений потенциальной и кинетической энергии для тех значений частоты возбуждения, при которых амплитуда маховика вдвое превосходит амплитуду шатуна? Для значения частоты, при котором эти амплитуды равны? Для случая, когда амплитуда маховика вдвое меньше амплитуды шатуна? Сравните наблюдаемые на экспериментальных графиках значения с полученными Вами теоретическими значениями этого отношения средних энергий.

1.3 Амплитуда установившихся колебаний и их запаздывание по фазе. Введите некоторое значение добротности осциллятора, скажем, $Q = 5$.

(а) Оцените, на сколько процентов резонансная частота в этом случае ниже собственной частоты осциллятора ω_0 .

(б) Чему равно отношение амплитуды маховика при резонансе к амплитуде вынуждающего шатуна?

(в) Чему равен сдвиг фаз (в радианах и в долях периода колебаний) между колебаниями маховика и шатуна на резонансной частоте и на частоте, составляющей 0,8 резонансного значения?

Дайте ответы на те же вопросы для $Q = 20$.

1.4 Особенности кинематического возбуждения колебаний.** В случае динамического возбуждения колебаний заданной периодической силой, величина которой не зависит от положения маховика, отношение средних значений потенциальной и кинетической энергий равно $(\omega_0/\omega)^2$, так что при низких частотах в среднем преобладает потенциальная энергия.

(а) Проанализируйте изменение со временем каждого из видов энергии и полной энергии осциллятора при кинематическом возбуждении. Почему, несмотря на совпадение дифференциальных уравнений для случаев динамического и кинематического возбуждения колебаний, в энергетических превращениях имеются определенные различия? Рассчитайте отношение средних значений потенциальной и кинетической энергии для кинематического способа возбуждения колебаний. Приведите качественные физические соображения для объяснения отличия этого отношения от случая динамического возбуждения колебаний.

(б) При какой частоте возбуждения средние значения потенциальной и кинетической энергии одинаковы?

(в) В случае динамического возбуждения установившихся колебаний при резонансе максимальные (и средние) значения двух видов энергии одинаковы, а их изменения происходят точно в противофазе, так что полная механическая энергия осциллятора остается неизменной. Внешний источник лишь компенсирует потери энергии из-за трения. Однако при кинематическом возбуждении осциллятора его полная энергия испытывает вариации даже при резонансе. Рассчитайте, на сколько процентов максимальные и минимальные значения каждого из видов энергии при резонансе отличаются от их средних значений.

1.5 Установившиеся колебания при разных частотах.**

(а) Пусть частота ω принудительного движения шатуна немного ниже собственной частоты осциллятора ω_0 , скажем, $\omega = 0.9\omega_0$, и пусть добротность Q равна 5. Чему равно отношение амплитуды установившихся колебаний к амплитуде при резонансе? Какую долю цикла составляет отставание по фазе колебаний маховика от колебаний шатуна?

(б) При каких значениях вынуждающей частоты (по обе стороны от резонанса) амплитуда установившихся колебаний составляет половину амплитуды при резонансе? Какую часть цикла составляет запаздывание по фазе в каждом из этих случаев? Какой из видов энергии в среднем преобладает в каждом случае?

(в) При какой частоте ω вынуждающего шатуна амплитуды маховика и шатуна одинаковы? Какую часть периода составляет в этом случае запаздывание маховика от шатуна по фазе?

1.6 Полуширина резонансной кривой.**

(а) Изучите аналитически и экспериментально зависимость резонансной амплитуды установившихся колебаний от значения добротности Q . Как полуширина резонансной кривой зависит от добротности осциллятора? (Полушириной резонансной кривой называют интервал частот, в пределах которого амплитуда установившихся колебаний превышает половину ее максимального значения.) Получите приближенную формулу для полуширины, справедливую в случае слабого затухания, т. е. при $Q \gg 1$.

(б) Как изменяется положение максимума резонансной кривой по мере увеличения затухания? При каком значении добротности Q этот максимум смещается к нулевому значению частоты? Иначе говоря, при какой добротности Q статический эффект вынуждающей силы больше динамического эффекта такой же по величине переменной силы при всех частотах?

1.7** Поглощаемая и рассеиваемая мощность.

(а) Докажите аналитически, что при установившихся вынужденных колебаниях энергия, получаемая осциллятором от внешнего источника за период, равна энергии, рассеиваемой осциллятором из-за трения за то же время. Воспользуйтесь выражением (4.8) из учебного пособия “Физика колебаний” для значений амплитуды a и фазы δ установившихся колебаний.

(б) Покажите, что спектральное распределение энергии, поглощаемой осциллятором с высокой добротностью при вынужденных колебаниях, описывается лоренцевской функцией

$$F(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2},$$

где $\tau = 1/\gamma$. Выразите полуширину лоренцевского контура через добротность осциллятора.

1.2.2 Переходные процессы

2.1* Начальные условия, при которых переходный процесс не возникает.

(а) Для произвольных значений добротности осциллятора, амплитуды и частоты возбуждающего шатуна получите выражения для начального угла отклонения маховика $\varphi_0 = \varphi(0)$ и его угловой скорости $\Omega = \dot{\varphi}(0)$ при $t = 0$, чтобы синусоидальные вынужденные колебания неизменной амплитуды происходили сразу после включения внешнего воздействия, без переходного процесса.

(б) Приняв $Q = 5$, $\omega = \omega_0$, и $\phi_0 = 15^\circ$, рассчитайте значения φ_0 и Ω , при которых не будет переходного процесса. Проверьте свой результат с помощью моделирующего эксперимента на компьютере. Повторите расчет и эксперимент для других значений параметров системы: $Q = 25$, $\omega = 0.5\omega_0$, $\phi_0 = 15^\circ$ и, скажем, для $Q = 25$, $\omega = 1.5\omega_0$, $\phi_0 = 15^\circ$.

2.2* **Переходные процессы при резонансе.** Примите следующие значения для параметров осциллятора и вынуждающего воздействия: $Q = 5$, $\omega = \omega_0$, $\phi_0 = 15^\circ$, и рассмотрите переходный процесс при нулевых начальных условиях $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

(а) Рассчитайте промежуток времени (выразив его в единицах периода колебаний), по истечении которого амплитуда маховика достигнет 90% своего установившегося значения. Проверьте свой результат в эксперименте. Обратите внимание на экспоненциальный характер приближения амплитуды к своему значению для установившихся колебаний.

Проанализируйте энергетические превращения в этом процессе, используя графики кинетической, потенциальной и полной энергии. В какие моменты времени полная энергия осциллятора растет наиболее быстро?

(б) Внимательно изучите графики разложения переходного процесса на его простые составляющие (на гармонические установившиеся колебания и затухающие собственные колебания). Обратите особое внимание на экспоненциальное затухание вклада собственных колебаний. Почему начальная амплитуда собственных колебаний совпадает в этом случае с амплитудой установившихся колебаний? Изменится ли это соотношение амплитуд при изменении начальных условий?

(в)* Принимая во внимание аналитическое выражение для $\varphi(t)$, соответствующее резонансному случаю ($\omega = \omega_0$), предскажите поведение сечений Пуанкаре на фазовой плоскости. Проверьте свое предсказание в моделирующем эксперименте.

(г)* Рассмотрите переходный процесс резонансной раскачки осциллятора в отсутствие трения. По какому закону растёт амплитуда в переходном процессе, начинающемся из состояния

покоя в положении равновесия? Во сколько раз амплитуда маховика превысит амплитуду шатуна после $k = 15$ полных циклов колебания шатуна? Сколько периодов внешнего воздействия необходимо для того, чтобы амплитуда маховика в $n = 20$ раз превысила амплитуду шатуна? Проверьте свои ответы в эксперименте. Что представляет собой проекция фазовой траектории на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ в этом случае? Как располагаются в фазовой плоскости сечения Пуанкаре?

(д)* Возможно ли уменьшение амплитуды колебаний маховика в отсутствие трения при точной настройке внешнего воздействия в резонанс с собственной частотой осциллятора? Приведите физическое обоснование своему ответу. Подтверждаются ли Ваши заключения в эксперименте?

2.3* Переходные процессы вблизи резонанса.

Исследуйте процесс установления колебаний в окрестности резонанса. Пусть частота внешнего возбуждения равна, например, $1.2\omega_0$ (ω_0 – собственная частота осциллятора). Рассмотрите прежде всего поведение системы в отсутствие трения при нулевых начальных условиях.

(а)* Рассчитайте амплитуду колебаний на собственной частоте ω_0 , входящих составной частью в переходный процесс (напомним, что в отсутствие трения их амплитуда остается неизменной, и переходный процесс продолжается бесконечно долго). Найдите также амплитуду угловой скорости этих колебаний. Чему равно отношение амплитуды колебаний на собственной частоте к амплитуде установившихся вынужденных колебаний на частоте ω ? Проверьте свой расчет, используя опцию “Разложение переходного процесса” в панели “Условия моделирования”.

(б) Объясните наблюдаемые графики угловой скорости в процессе биений, используя метод векторных диаграмм для сложения двух синусоидальных колебаний, формирующих биения. Сколько циклов колебаний совершит шатун к моменту, когда амплитуда угловой скорости маховика достигнет максимального значения? Сколько времени проходит между последовательными обращениями амплитуды в нуль? Иными словами, чему равен период таких переходных биений?

(в)** Рассчитайте максимальные значения угловой скорости и угла отклонения во время биений. Чему равно отношение максимальной амплитуды маховика к амплитуде шатуна?

(г)** Обратите внимание на распределение сечений Пуанкаре фазовой траектории для рассматриваемого процесса биений в отсутствие трения. Объясните наблюдаемое распределение.

(д)** Рассмотрите влияние небольшого трения на изучаемый процесс, введя умеренное значение добротности Q (20 – 25), оставив без изменения значения всех остальных параметров. Каких изменений в поведении осциллятора следует при этом ожидать? Как изменится распределение сечений Пуанкаре на фазовой плоскости? Проследите поведение сечений Пуанкаре на протяжении всего переходного процесса. Объясните наблюдаемое распределение.

(е)** Слегка измените значение частоты внешнего возбуждения. Пусть, скажем, ω будет $1.19\omega_0$ или $1.21\omega_0$ вместо прежнего значения $1.20\omega_0$. К каким изменениям это приведет в переходном процессе? Какими будут распределения сечений Пуанкаре в фазовой плоскости при таких частотах возбуждения в случае отсутствия трения и при наличии слабого трения? С чем связано изменение наблюдаемой картины по сравнению с исследованным выше случаем $\omega = 1.2\omega_0$?

(ж)* Предскажите поведение сечений Пуанкаре для вынуждающей частоты $\omega = 1.25\omega_0$.

2.4* Переходные процессы вдали от резонанса.

Пусть частота принудительных колебаний возбуждающего шатуна в четыре раза меньше собственной частоты осциллятора: $\omega = 0.25\omega_0$. Будем рассматривать поведение системы при нулевых начальных условиях.

(а) Какими будут колебания маховика в переходном процессе, если трение отсутствует? Рассчитайте для этого случая амплитуды двух налагающихся друг на друга гармонических колебаний, одного на собственной частоте осциллятора ω_0 и второго на частоте возбуждения ω . Чему равны амплитуды соответствующих угловых скоростей?

(б) Пронаблюдайте в эксперименте, какую фазовую траекторию вычерчивает в этом процессе изображающая точка. Объясните форму наблюдаемой фазовой траектории и распределение сечений Пуанкаре.

(в) Введите небольшое трение, выбрав для Q значение около 15, сохраняя прежними значения всех остальных параметров. Используя опцию “Разложение переходного процесса” в панели “Условия моделирования”, наблюдайте изменение формы графиков при постепенном затухании колебаний на собственной частоте. Проследите, как сложная фазовая траектория переходного процесса постепенно трансформируется в эллипс, соответствующий установившимся синусоидальным колебаниям.

(г)** Рассмотрите противоположный случай высокочастотной возбуждающей силы. Например, пусть частота внешнего воздействия будет в четыре раза больше собственной частоты осциллятора: $\omega = 4\omega_0$. Выберите нулевые начальные условия и полное отсутствие трения. Чему будет равно отношение амплитуд двух складывающихся колебаний с частотами ω и ω_0 ? Во сколько раз максимальное отклонение маховика, наблюдаемое во время этого переходного процесса, превышает амплитуду установившихся колебаний, входящих составной частью в этот переходный процесс?

(е)** Сравните формы фазовых траекторий и распределения сечений Пуанкаре для последних двух случаев, а именно, $\omega = 0.25\omega_0$ и $\omega = 4\omega_0$ в отсутствие трения. Чем объясняется подобие фазовых траекторий для этих случаев?

(д)* Введите небольшое трение в случае, когда $\omega = 4\omega_0$. Проследите, как постепенно устанавливаются высокочастотные синусоидальные вынужденные колебания по мере того, как затухают колебания на собственной частоте. Как в этом случае эволюционирует форма фазовой траектории? Как ведет себя распределение сечений Пуанкаре в течение рассматриваемого переходного процесса?

(е)** Повторите моделирующий эксперимент при других значениях вынуждающей частоты. Возьмите, например, значения $\omega = 0.125\omega_0$, $\omega = 0.5\omega_0$, $\omega = 1.5\omega_0$, $\omega = 2\omega_0$, $\omega = 6\omega_0$. Объясните наблюдаемые особенности переходных процессов в этих случаях.

5. Осциллятор с несинусоидальной внешней силой

1.2.1 Резонансное возбуждение осциллятора

1.1 **Основной резонанс в отсутствие трения.** Допустим, что трение полностью отсутствует, и что период T внешней силы в точности равен периоду T_0 собственных колебаний осциллятора. Рассмотрите случай нулевых начальных условий, т. е. маховик покоится в среднем положении в момент включения внешнего воздействия.

(а) Какой должна быть угловая амплитуда ϕ_0 скачкообразных поворотов шатуна для того, чтобы размах колебаний маховика достиг 180° после первых 10 циклов движения шатуна? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте.

(б) По какому закону происходит рост амплитуды колебаний маховика? Объясните наблюдаемую форму фазовой траектории. Как растет со временем полная энергия осциллятора?

(в) В условиях точной настройки периода внешнего воздействия в резонанс с собственным периодом осциллятора, возможно ли убывание во времени амплитуды колебаний? Приведите физическое обоснование своему ответу. Подтверждается ли Ваш ответ моделирующим экспериментом?

1.2 **Высшие резонансы в отсутствие трения.** Исследуйте резонансное возбуждение первоначально покоившегося в среднем положении осциллятора в условиях, когда период внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени ровно в три раза больше периода собственных колебаний осциллятора ($T = 3T_0$):

(а) При какой амплитуде ϕ_0 принудительных прямоугольных колебаний шатуна размах колебаний маховика достигнет значения 180° после первых 10 циклов движения шатуна? Проверьте свой ответ в эксперименте.

(б) В чем заключаются различия фазовых траекторий в данном случае и в случае основного резонанса ($T = T_0$)?

1.3* **Переходный процесс и установившиеся колебания в условиях главного резонанса.** Полагая период прямоугольного внешнего воздействия равным периоду собственных колебаний осциллятора ($T = T_0$), и считая маховик покоившимся в среднем положении до включения внешней силы, исследуйте переходный процесс и установившиеся колебания при наличии трения:

(а) Рассчитайте амплитуду установившихся колебаний маховика при амплитуде шатуна $\phi_0 = 10^\circ$ и добротности осциллятора $Q = 10$. Проверьте свой результат в эксперименте.

(б) По какому закону происходит рост амплитуды при раскатке осциллятора из состояния покоя? Объясните особенности фазовой траектории, наблюдаемой в этом случае.

(в) Чему равна начальная амплитуда затухающих собственных колебаний, входящих в состав переходного процесса при $\phi_0 = 10^\circ$ и $Q = 10$? По какому закону амплитуда этих колебаний убывает со временем?

(г) Какими должны быть начальные условия для того, чтобы установившиеся вынужденные колебания происходили с самого начала, т. е. сразу после включения периодической прямоугольной внешней силы, без переходного процесса? Проверьте свой результат экспериментально.

(д) Изучите спектральный состав выходных установившихся колебаний в этом случае. Почему эти выходные колебания почти гармонические, несмотря на прямоугольную форму временной зависимости входных колебаний (принудительных колебаний возбуждающего шатуна)?

1.4* **Установившиеся колебания в случаях резонансов высоких порядков.**

(а) Рассчитайте амплитуду установившихся колебаний для $T = 3T_0$, $\phi_0 = 25^\circ$, $Q = 5$. Проверьте результат Вашего расчета в эксперименте. Объясните наблюдаемую в этом случае

форму графиков и фазовой траектории.

(б) Какие превращения энергии происходят в течение установившихся колебаний? Сопоставьте экспериментально наблюдаемые графики временной зависимости кинетической, потенциальной и полной энергии с соответствующими графиками угловой скорости и угла отклонения маховика. Объясните наблюдаемую форму зависимости полной энергии осциллятора от угла отклонения. Как график полной энергии соотносится с параболическими потенциальными ямами, показанными на той же диаграмме?

(в) Какие гармоники определяют в данном случае форму установившихся колебаний? Почему, несмотря на точную настройку осциллятора на частоту третьей гармоники внешнего воздействия, его первая гармоника заметно влияет на форму выходных колебаний? Каким образом первая гармоника проявляет себя в колебаниях осциллятора?

(г) Исследуйте теоретически и экспериментально влияние трения на спектральный состав и форму установившихся колебаний осциллятора при $T = 3T_0$. Обратите внимание на относительное уменьшение вклада первой и пятой гармоник по мере увеличения добротности осциллятора.

(д) Изучите установившиеся колебания при резонансах пятого и седьмого порядков (т. е. при совпадении частоты пятой или седьмой гармоники вынуждающих прямоугольных импульсов с собственной частотой осциллятора). Обратите внимание на характер преобразования спектра в этих случаях и на зависимость спектра установившихся колебаний от добротности осциллятора. Какой вид имеет фазовая траектория для этих резонансов? Сделайте теоретическую оценку максимального размаха установившихся колебаний маховика при $T = 5T_0$ для случаев высокой добротности осциллятора (Q порядка 15 – 20) и сильного трения (Q порядка 1 – 3).

1.2.2 Нерезонансные вынужденные колебания

2.1* Вынужденные колебания и условия отсутствия переходного процесса при $T = 2T_0$.

(а) Предскажите теоретически формы графиков угла отклонения, угловой скорости и фазовой траектории установившихся колебаний осциллятора для $T = 2T_0$ при отсутствии трения (и при очень слабом трении). Какими должны быть начальные условия, чтобы установившиеся колебания происходили сразу после включения внешнего воздействия, т. е. чтобы не было переходного процесса? Проверьте свои предсказания в моделирующем эксперименте.

(б) Почему в случае установившихся колебаний при $T = 2T_0$ в отсутствие трения при принудительных скачкообразных поворотах шатуна не происходит обмена энергией между осциллятором и внешним источником (осциллятор не получает и не отдает энергию)?

(в) Изучите спектральный состав установившихся колебаний при $T = 2T_0$. Особое внимание обратите на вклад третьей гармоники в выходные колебания. Частота третьей гармоники в данном случае выше собственной частоты осциллятора, и поэтому на выходе она имеет обратную фазу. Каким образом это изменение фазы третьей гармоники сказывается на форме результирующих выходных колебаний? Почему при сложении первой и третьей гармоник в выходных колебаниях вместо уплощенной кривой (соответствующей плоским прямоугольным импульсам на входе) получается кривая с «буграми» на месте плоских горизонтальных участков входных прямоугольных импульсов?

2.2* Установившиеся колебания при $T = 2T_0$ и $T = 4T_0$.

(а) Рассмотрите вынужденные колебания осциллятора в случае $T = 2T_0$ при наличии умеренного трения (скажем, $Q = 5$). К каким изменениям (по сравнению с рассмотренным выше случаем полного отсутствия трения) приводит это небольшое трение на графиках временной

зависимости и на фазовой траектории установившихся колебаний? Обратите внимание на изменения в энергетических превращениях.

(б) Почему при $T = 2T_0$ трение почти не сказывается на спектральном составе установившихся колебаний осциллятора, в отличие от случая $T = 3T_0$?

(в) Рассчитайте размах установившихся колебаний маховика (максимальный угол отклонения от средней точки) при $T = 2T_0$, $\phi_0 = 25^\circ$, $Q = 5$. Сравните результат со случаем отсутствия трения. Проверьте свой ответ в эксперименте.

(г) Рассчитайте размах φ_m установившихся вынужденных колебаний маховика при $T = 4T_0$, $\phi_0 = 25^\circ$, $Q = 5$.

(д)** В отсутствие трения размах установившихся вынужденных колебаний маховика при $T = 4T_0$, как и при $T = 2T_0$, равен $2\phi_0$, т. е. ровно вдвое больше, чем размах принудительных скачкообразных поворотов шатуна. Но если при $T = 2T_0$ введение трения приводит только к уменьшению амплитуды установившихся колебаний, то при $T = 4T_0$ введение небольшого трения приводит к увеличению амплитуды маховика. По мере увеличения трения амплитуда установившихся колебаний сначала растет, достигает максимума при некотором значении добротности, и затем убывает при дальнейшем увеличении трения. Объясните качественно такую необычную, на первый взгляд, зависимость амплитуды от трения. Найдите то значение добротности Q_m , при котором амплитуда установившихся колебаний максимальна, и рассчитайте эту максимальную амплитуду φ_{\max} . Во сколько раз эта максимальная амплитуда φ_{\max} превосходит размах ϕ_0 поворотов возбуждающего шатуна? Ответьте на те же вопросы для установившихся колебаний при $T = 6T_0$.

2.3 Установившиеся колебания при большом периоде возбуждения ($T \gg T_0$).

(а) Изучите вынужденные колебания осциллятора под действием внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени в условиях, когда собственная частота осциллятора лежит где-нибудь в интервале между частотами двух последовательных нечетных гармоник высокого порядка (например, при $5T_0 < T < 7T_0$). Какие гармоники доминируют в установившихся выходных колебаниях осциллятора? Сравните форму колебаний на выходе с формой импульсов входного воздействия. В чем заключается основное отличие формы колебаний на входе и на выходе?

(б) Исследуйте влияние трения на характер установившихся колебаний. Почему при сильном затухании наблюдаются меньшие искажения (по сравнению со случаем слабого трения), т. е. выходные импульсы имеют почти прямоугольную форму?

(в) Объясните характер превращений энергии при таких колебаниях, используя получаемый в процессе моделирования график зависимости полной энергии от угла отклонения. Какова взаимосвязь этого графика с параболическими потенциальными ямами, показанными на той же диаграмме?

(г) Оцените максимальное отклонение маховика в таких установившихся колебаниях при $T \gg T_0$ и сильном трении (рассмотрите отдельно случаи Q порядка 1 – 3 и $Q = 1/2$).

2.4 Установившиеся вынужденные колебания под действием импульсов малого периода.

(а) Пусть период T внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени составляет небольшую часть (скажем, 0.2 – 0.3) собственного периода осциллятора T_0 . В таких условиях график зависимости угловой скорости маховика от времени при установившихся колебаниях представляет собой “пилу” с почти прямолинейными треугольными равнобедренными зубцами. Почему? Предложите физическое объяснение такой форме графика скорости. Чем в этом случае отличается от синусоиды график зависимости угла отклонения от времени?

(б) Оцените теоретически высоту зубцов графика зависимости угловой скорости от времени при заданных значениях периода и амплитуды принудительных скачкообразных поворотов

шатуна. Оцените также максимальный угол отклонения маховика от среднего положения при таких установившихся колебаниях, приняв для T значение $T_0/4$ и $\phi_0 = 30^\circ$ для амплитуды шатуна. Какой спектральный состав характерен для таких колебаний?

6. Параметрическое возбуждение линейного осциллятора

1.2.1 Основной параметрический резонанс

1.1* **Основной резонанс ($n = 1$) в отсутствие трения.** Задайте умеренное значение глубины m модуляции момента инерции (около 10 – 15%). Пусть период модуляции T равен половине периода T_0 собственных колебаний осциллятора. Чтобы принудительная модуляция параметра вызвала резонанс, осциллятор с самого начала должен совершать хотя бы небольшие собственные колебания, т. е. должны быть заданы ненулевые начальные условия.

(а) Какого вида начальные условия следует задать, чтобы сразу после включения модуляции момента инерции начался быстрее резонансный рост амплитуды колебаний? Напомним, что в принятой модели в начальный момент времени $t = 0$ грузы скачкообразно раздвигаются в стороны от оси вращения, так что момент инерции ротора возрастает.

(б) Какого вида начальные условия приведут сначала к постепенному затуханию уже существующих колебаний? Проверьте свой ответ в моделирующем эксперименте. Используя полученные графики колебаний, объясните физическую причину первоначального уменьшения амплитуды колебаний. Примите во внимание фазовые соотношения между собственными колебаниями ротора и принудительными периодическими изменениями его момента инерции. Почему через некоторое время убывание амплитуды колебаний сменяется ее возрастанием?

(в)** Попытайтесь выяснить, какими факторами определяется промежуток времени, по истечении которого первоначальное затухание колебаний сменяется их неограниченным ростом.

1.2* **Рост амплитуды в условиях основного резонанса в отсутствие трения.** Пусть принудительная модуляция момента инерции происходит с периодом T , равным половине периода T_0 собственных колебаний осциллятора ($T = T_0/2$).

(а) По какому закону растет со временем амплитуда колебаний в условиях основного резонанса, если задано некоторое начальное отклонение $\varphi(0) = \varphi_0$ и нулевая начальная скорость $\dot{\varphi}(0) = 0$? При каком значении глубины модуляции m (в отсутствие трения) начальная амплитуда колебаний удвоится за 10 циклов модуляции момента инерции? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте.

(б) Чем будет отличаться процесс резонансной раскачки от случая, рассмотренного в пункте (а), если задать такое же по величине начальное отклонение в противоположную сторону?

1.3* Порог возбуждения для основного резонанса.

(а) Выбрав умеренное значение глубины модуляции момента инерции (скажем, $m = 20\%$), оцените пороговое (минимальное) значение добротности Q_{\min} в условиях настройки периода модуляции на основной резонанс ($T = T_0/2$). Напомним, что пороговый режим соответствует стационарным колебаниям неизменной амплитуды (параметрическая регенерация). При каких начальных условиях колебания осциллятора с пороговым значением добротности $Q = Q_{\min}$ сразу будут стационарными?

(б) Уточните Вашу теоретическую оценку порогового значения добротности Q_{\min} с помощью моделирующего эксперимента на компьютере (методом проб и ошибок). В чем заключается причина расхождений теоретического и экспериментального значений?

(в) Исследуйте устойчивость режима параметрической регенерации, т. е. режима стационарных колебаний в условиях порога возбуждения (для $Q = Q_{\min}$). Устойчив ли этот режим по отношению к малым изменениям параметров системы (периода и глубины модуляции, добротности)? Устойчив ли режим регенерации по отношению к малым изменениям начальных условий?

(г)** Пороговое значение добротности, обеспечивающее стационарные колебания при заданной глубине модуляции m , будет абсолютно минимальным при *точной* настройке периода

модуляции на резонанс. При малых значениях m основной резонанс имеет место при $T = T_0/2$. Однако с ростом m резонансное значение периода модуляции начинает отклоняться от $T_0/2$. Получите выражение для резонансного значения периода модуляции при произвольно большой глубине модуляции m и сделайте численные оценки T для $m = 15\%$ и $m = 40\%$.

1.4* Рост амплитуды параметрических колебаний при превышении порога возбуждения.

(а) Для периода модуляции $T = T_0/2$ и глубины модуляции $m = 15\%$, во сколько раз возрастает амплитуда колебаний за 10 циклов модуляции параметра, если добротность вдвое больше своего порогового значения, т. е. $Q = 2Q_{\min}$? Зависит ли ответ на этот вопрос от начальных условий? Проверьте свой ответ в эксперименте.

(б) Какой будет амплитуда колебаний спустя еще 10 периодов модуляции? Почему при превышении порога возбуждения трение не в состоянии ограничить роста амплитуды колебаний, возбуждаемых параметрически?

1.5 Основной интервал параметрического резонанса в отсутствие трения.**

(а) Выполните теоретический расчет значений периода модуляции T , соответствующих границам основного интервала параметрической неустойчивости, для заданного значения глубины модуляции m (в приближении $m \ll 1$) для случая, когда трение отсутствует.

(б) Как ширина интервала неустойчивости зависит от глубины модуляции? Влияют ли члены второго порядка малости (по параметру $m \ll 1$) на ширину интервала?

1.7 Начальные условия для периодических колебаний на границах интервала.**

(а) Введите значение периода модуляции, соответствующее нижней границе основного интервала параметрической неустойчивости при заданном значении глубины модуляции m (в отсутствие трения). Задайте произвольно некоторое начальное отклонение ротора. Какую начальную скорость необходимо задать для того, чтобы получить в моделирующем эксперименте стационарные периодические колебания неизменной амплитуды? Сделайте соответствующие расчеты и эксперименты также и для верхней границы интервала неустойчивости.

(б) Объясните характерные особенности наблюдаемых графиков и фазовой траектории для стационарных колебаний на каждой из границ основного интервала параметрической неустойчивости.

(в) Для выбранного значения начального угла отклонения φ_0 и рассчитанного значения начальной угловой скорости $\dot{\varphi}(0)$, обеспечивающей стационарные колебания на границе интервала, рассчитайте амплитуду колебаний (для каждой из границ интервала). Проверьте свои теоретические значения в эксперименте.

1.8 Порог параметрического возбуждения в пределах резонансного интервала.** Режим параметрической генерации при точной настройке на основной резонанс был рассмотрен в задаче 1.3, где требовалось найти минимальное значение добротности $Q = Q_{\min}$, обеспечивающее стационарные колебания. Но стационарные колебания возможны и при некоторой расстройке периода модуляции относительно его резонансного значения.

(а) Выберите некоторое значение периода модуляции T где-либо в пределах интервала параметрического резонанса (для заданной глубины модуляции m), например, посередине между резонансным значением и одной из границ. Оцените наблюдаемый в эксперименте рост амплитуды колебаний в отсутствие трения, и затем на основе этих наблюдений рассчитайте то минимальное (пороговое) значение добротности $Q = Q_{\min}$, которое может обеспечить стационарные колебания при данных значениях глубины и периода модуляции.

(б) Проверьте свою оценку $Q = Q_{\min}$ в эксперименте и уточните ее методом проб и ошибок. Сравните наблюдаемые графики (и фазовые траектории) стационарных колебаний с соответствующими графиками стационарного процесса параметрической регенерации в условиях

точной настройки периода модуляции на основной резонанс, а также с графиками стационарных колебаний на границах интервала в отсутствие трения. Чем объясняются наблюдаемые отличия?

(в)*** Для малых значений глубины модуляции $m \ll 1$ рассчитайте с точностью до членов второго порядка по m пороговое значение добротности $Q = Q_{\min}$ для периода модуляции, лежащего в произвольной точке внутри интервала параметрического резонанса. Сравните свой теоретический результат с оценкой, полученной экспериментально в пунктах (а) и (б).

1.9*** Основной интервал параметрического резонанса при наличии трения.

(а) Для некоторого фиксированного значения глубины модуляции m частотный интервал параметрического резонанса сужается с увеличением трения и исчезает совсем, когда добротность уменьшается до порогового значения. Допустим, что добротность Q больше своего порогового значения Q_{\min} . Рассчитайте значения T_- и T_+ периода модуляции T , соответствующие границам интервала параметрического резонанса для заданных m и Q (в приближении $m \ll 1$). Выразите T_- и T_+ через m и m_{\min} , где $m_{\min} = \pi/(2Q)$ — приближенное значение пороговой глубины модуляции m для данной добротности Q (в условиях точной настройки на основной резонанс).

(б) Чтобы в моделирующем эксперименте наблюдать стационарные колебания, соответствующие этим границам, необходимо задать начальные условия должным образом. Какую начальную скорость нужно ввести при заданном начальном отклонении φ_0 , чтобы получить стационарные колебания (для каждой из границ интервала)? Проверьте свои расчеты в эксперименте.

1.2.2 Ручное управление параметром

Моделирующая программа допускает, наряду с автоматическим программным режимом принудительной модуляции момента инерции с заданным периодом (это режим по умолчанию), возможность включения режима ручного управления моментом инерции ротора. Для перехода на ручное управление нужно поставить “галочку” в контрольный бокс “Ручное управление” (Manual Control) в любом из рабочих экранов программы. Глубина модуляции (как и добротность осциллятора) и в этом случае определяется значением, заданным в панели ввода параметров, но автоматическая модуляция момента инерции подавляется, и моменты перемещений грузов Вы выбираете самостоятельно, щелкая мышью по соответствующей кнопке или нажимая клавишу “Пробел” на клавиатуре. Если грузы находились в придвинутом к оси положении, то при первом щелчке (или нажатии пробела) они смещаются в сторону от оси (и наоборот), а при следующем щелчке возвращаются в прежние положения.

2.1 Параметрическое возбуждение колебаний ручным управлением изменениями момента инерции.

(а) Включите режим ручного управления моментом инерции. Введите некоторое значение m глубины модуляции (около 15 – 30%) и выберите значение добротности, превышающее пороговое (для данного m) значение. Задав подходящие начальные условия, возбудите собственные колебания небольшой амплитуды (10 – 20 градусов). Попробуйте увеличить размах колебаний, щелкая мышью по кнопке ручного управления в подходящие моменты времени (либо нажимая клавишу “Пробел” на клавиатуре). В какие моменты времени следует смещать грузы в сторону оси и в какие моменты раздвигать их в прежние положения, чтобы размах колебаний увеличивался как можно быстрее?

(б) Возможно ли с помощью ручного управления добиться увеличения размаха колебаний ротора до заданной величины (скажем, до 180°) за меньшее число циклов изменения момента инерции, чем в автоматическом режиме в условиях точной настройки периода прямоугольной модуляции на основной резонанс? Подразумевается, что все параметры системы (глубина

модуляции, добротность, начальная амплитуда) одинаковы для режимов ручной и автоматической модуляции момента инерции. Приведите достаточно убедительные аргументы для обоснования своего ответа.

2.2 Гашение колебаний ручным управлением. После того, как Вы возбудили достаточно сильные колебания осциллятора с помощью подходящего манипулирования моментом инерции ротора, попытайтесь вручную как можно быстрее погасить колебания ротора с помощью принудительных изменений его момента инерции. Для перехода от раскачки к гашению колебаний придется должным образом изменить фазу принудительных изменений момента инерции. В какие моменты времени следует сдвигать грузы к оси ротора, и в какие моменты раздвигать их обратно, чтобы как можно быстрее погасить колебания ротора?

1.2.3 Параметрические резонансы и интервалы неустойчивости высоких порядков ($n > 1$)

3.1* Параметрический резонанс третьего порядка ($n = 3$) в отсутствие трения.

(а) Исследуйте экспериментально параметрическое возбуждение ротора при скачкообразных изменениях момента инерции ротора с периодом $T \approx 3T_0/2$ (приблизительно полтора периода собственных колебаний, или три цикла изменения параметра на протяжении двух собственных колебаний). Какие начальные условия обеспечат рост колебаний с самого начала модуляции параметра?

(б) Какое значение m глубины модуляции момента инерции необходимо задать, чтобы в отсутствие трения начальная амплитуда колебаний удвоилась за 15 циклов модуляции при настройке на резонанс третьего порядка? Сколько циклов модуляции необходимо для того, чтобы амплитуда удвоилась еще раз?

(в) При каких начальных условиях амплитуда колебаний сначала будет убывать? Почему это затухание колебаний через некоторое время неизбежно сменится их ростом?

3.2* Порог возбуждения для параметрического резонанса третьего порядка.

(а) Выполните теоретическую оценку порогового (минимального) значения добротности осциллятора Q_{\min} при малом значении глубины модуляции $m \ll 1$ с точностью до членов первого порядка по m . Сравните полученное значение с пороговой добротностью для основного резонанса (задача 1.3) и для резонанса второго порядка $n = 2$ (см. задачу 3.4). Как можно объяснить это различие пороговых значений добротности для резонансов разных порядков?

(б) Для глубины модуляции $m = 30\%$ рассчитайте минимальное значение добротности Q_{\min} , при котором возможно параметрическое возбуждение колебаний (на основе теоретической оценки, полученной при ответе на предыдущий вопрос данной задачи). Улучшите теоретическую оценку методом проб и ошибок. Объясните наблюдаемую форму графиков и фазовой траектории стационарных колебаний при Q_{\min} . Какие факторы определяют амплитуду таких колебаний?

3.3** Третий интервал параметрического возбуждения.

(а) Рассчитайте приближенно значения периода модуляции T , которые соответствуют границам третьего интервала параметрической неустойчивости в отсутствие трения при заданной глубине модуляции момента инерции (в приближении $m \ll 1$) с точностью до членов первого порядка по m . Как ширина третьего интервала зависит от глубины модуляции? Влияют ли члены второго порядка на ширину интервала?

(б) Какую начальную угловую скорость следует ввести при выбранном начальном отклонении φ_0 для того, чтобы получить стационарные периодические колебания неизменной амплитуды (для каждой из границ третьего интервала параметрического резонанса)? Проверьте свой ответ в эксперименте. Чем отличаются фазовые траектории, соответствующие стационарным колебаниям на нижней и верхней границах этого интервала?

(в) Исследуйте ширину третьего интервала параметрического возбуждения в отсутствие трения при произвольно больших амплитудах модуляции m (см. рис. 6.11 и 6.12 учебного пособия). Обратите внимание, как ведет себя третий интервал при увеличении глубины модуляции. Какими физическими причинами можно объяснить постепенное смещение интервала в сторону более коротких периодов модуляции?

(г) При $m = 60\%$ обе границы третьего интервала параметрического резонанса совпадают (можно сказать, что они пересекаются при $m = 60\%$). Какими физическими причинами объясняется это исчезновение третьего интервала при такой глубине модуляции момента инерции?

3.4** Третий интервал параметрического резонанса при наличии трения.

(а) При малых m параметрический резонанс третьего порядка имеет место при $T = 3T_0/2$. Однако по мере увеличения глубины модуляции m резонансное значение периода модуляции все сильнее отклоняется от $3T_0/2$. Получите аналитическое выражение для периода модуляции, соответствующее точной настройке на третий резонанс для произвольных (в том числе приближающихся к 100%) значений глубины модуляции. Каковы резонансные значения периода для $m = 15\%$, $m = 40\%$ и $m = 60\%$?

(б) Как влияет трение на ширину третьего интервала параметрического резонанса? Для малых глубин модуляции $m \ll 1$ рассчитайте приближенно значения периода модуляции T , соответствующие границам интервала при заданной добротности Q . Ответ выразите через m и пороговое значение $m_{\min} = 3\pi/(2Q)$ (см. задачу 3.2).

3.5** Параметрический резонанс второго порядка.

(а) При небольших значениях глубины модуляции ($m < 20\%$) резонанс второго порядка оказывается слабее не только резонанса первого порядка, но и резонанса третьего порядка: при настройке периода модуляции на резонанс второго порядка амплитуда колебаний растет значительно медленнее, чем при настройке на резонансы $n = 1$ и $n = 3$ (для той же глубины модуляции). Какие физические причины можете Вы привести для объяснения того, что резонанс с $n = 2$ (как и другие резонансы четных порядков) при небольших значениях m выражен значительно слабее, чем резонансы нечетных порядков? Объясните наблюдаемую форму фазовой траектории при резонансе второго порядка.

(б) Какие начальные условия нужно задать для получения наиболее быстрого роста амплитуды колебаний при резонансе второго порядка? Попытайтесь определить экспериментально пороговое значение глубины модуляции для этого резонанса при заданной добротности (например, при $Q = 15$).

(в)** Для малых значений глубины модуляции $m \ll 1$ рассчитайте теоретически пороговое значение добротности Q_{\min} . (Для этого придется при расчете удерживать члены второго порядка малости по параметру m). Как пороговое значение добротности Q_{\min} зависит от m ? Сравните полученное теоретическое значение с порогом для основного резонанса и для резонанса третьего порядка. Объясните качественно эти различия, привлекая соображения физического характера. Сравните также теоретическое значение пороговой добротности с найденным экспериментально в пункте (б).

3.6** Второй интервал параметрического резонанса.

(а) Для малых значений глубины модуляции $m \ll 1$ рассчитайте теоретически ширину интервала параметрической неустойчивости, окружающего резонанс второго порядка. (В этом расчете необходимо учитывать члены второго порядка малости по параметру m .) Как ширина второго интервала зависит от m ? Сравните полученный результат для $n = 2$ с соответствующими величинами для основного интервала и для интервала порядка $n = 3$. Почему второй интервал при малых m значительно уже, чем интервал более высокого третьего порядка?

(б) Почему каждой из границ интервала неустойчивости с $n = 2$ соответствуют две различные фазовые траектории? Чем различаются стационарные колебания, соответствующие

различным фазовым траекториям для одной и той же границы? Как возбудить каждое из этих колебаний? Какие начальные условия приводят к стационарным колебаниям, если задан период модуляции, соответствующий одной из границ второго интервала параметрического резонанса?

3.7* Второй интервал параметрического резонанса при наличии трения.** Как влияет трение на ширину второго интервала параметрического возбуждения? Рассчитайте теоретически приближенные значения (для $m \ll 1$) периода модуляции T_{\pm} , соответствующие границам этого интервала при заданном значении добротности Q , превосходящем пороговое значение Q_{\min} , отвечающее точной настройке периода модуляции на резонанс второго порядка (см. задачу 3.5). Выразите результат расчета границ интервала для заданного Q через m и Q_{\min} .

7. Параметрические колебания при плавной модуляции

1.2.1 Основной параметрический резонанс

1.1* Основной резонанс ($n = 1$) в отсутствие трения.

(а) Пусть период T принудительного синусоидального движения грузов соответствует основному параметрическому резонансу $n = 1$ ($T = T_0/2$). По какому закону происходит рост амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний в отсутствие трения? Как скорость роста амплитуды зависит от глубины модуляции \tilde{m} расстояния грузов от оси вращения?

(б) Начальные условия какого типа приводят к росту амплитуды с самого начала модуляции момента инерции, если принудительное радиальное движение грузов описывается выражением $l(t) = l_0(1 + \tilde{m} \sin \omega t)$?

(в) Для найденных в пункте (б) начальных условий, благоприятствующих росту амплитуды с самого начала, сколько циклов модуляции пройдет, пока амплитуда вырастет в 5 раз по сравнению со своим начальным значением, если трения нет, а глубина модуляции расстояния грузов от оси ротора $\tilde{m} = 10\%$?

(г) Как изменится ответ на поставленный вопрос в случае начального отклонения ротора в противоположную сторону от положения равновесия?

1.2* Рост амплитуды колебаний при основном резонансе в условиях отсутствия трения.

(а) При точной настройке частоты модуляции на основной параметрический резонанс ($n = 1$), какова должна быть фаза начальных собственных колебаний, чтобы амплитуда с самого начала возрастала наискорейшим образом? Какое значение глубины модуляции \tilde{m} приведет к росту амплитуды колебаний от 20° до 80° на протяжении 12 средних периодов собственных колебаний T_0 ? Проверьте Ваш ответ в эксперименте.

(б) При каких начальных условиях амплитуда существующих колебаний будет убывать на ранней стадии модуляции момента инерции? Воспроизведите такой случай в моделирующем эксперименте. Почему через некоторое время убывание амплитуды замедляется и сменяется ростом амплитуды? Используя наблюдаемые графики колебаний, объясните физические причины роста или убывания амплитуды в зависимости от соотношения фаз между собственными крутильными колебаниями ротора и принудительным синусоидальным движением грузов. Сколько времени пройдет, пока начальное убывание амплитуды не сменится ее неограниченным ростом? Какими факторами определяется это время? (Последние два вопроса весьма сложны, и для получения правильного ответа необходимо серьезное и глубокое исследование.)

1.3* Порог основного параметрического резонанса.

(а) Оцените численно пороговое (минимальное) значение глубины модуляции \tilde{m} , которое приводит к росту амплитуды в основном параметрическом резонансе ($T = T_0/2$) для заданного значения добротности осциллятора Q (скажем, для $Q = 15$). Проверьте свой ответ экспериментально. Приведите физическое объяснение формы графиков колебаний и их фазовой траектории, наблюдаемых в условиях параметрической регенерации.

(б) При начальных условиях какого типа колебания в условиях порога возбуждения будут стационарными?

(в) Полагая частоту модуляции точно настроенной на основной параметрический резонанс $n = 1$, оцените пороговое (минимальное) значение добротности Q , соответствующее стационарным колебаниям неизменной амплитуды (т. е. режиму параметрической регенерации) при некотором умеренном значении (10 – 15%) глубины модуляции \tilde{m} расстояния грузов от оси вращения.

(г) Уточните теоретическую оценку пороговой добротности с помощью моделирующего эксперимента. Чем объясняются наблюдаемые расхождения экспериментальных результатов с теоретическими предсказаниями?

(д) Устойчив ли режим стационарных колебаний в условиях порога возбуждения (режим параметрической регенерации) по отношению к малым изменениям параметров системы? По отношению к малым изменениям начальных условий?

(е) В случае стационарных колебаний на пороге основного параметрического резонанса, чему равно отношение амплитуды третьей гармоники к амплитуде гармонической составляющей на основной частоте? (Фундаментальная частота в данном случае равна половине частоты модуляции.)

1.4* Рост амплитуды параметрических колебаний при превышении порога возбуждения.

(а) Для заданного значения \tilde{m} (скажем, для $\tilde{m} = 0.15$) рассчитайте минимальную добротность Q_{\min} , соответствующую порогу возбуждения параметрического резонанса. Допустим, что в эксперименте введено вдвое большее значение добротности $Q = 2Q_{\min}$. Во сколько раз возрастет амплитуда колебаний за первые 10 циклов модуляции в условиях точной настройки на основной резонанс? Зависит ли ответ от начальных условий? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте.

(б) Какой будет амплитуда колебаний еще через 10 циклов модуляции? Почему трение не в состоянии ограничить рост амплитуды колебаний при параметрическом резонансе?

1.2.2 Основной частотный интервал параметрического резонанса

2.1** Основной интервал параметрического возбуждения в отсутствие трения.

(а) Рассчитайте значения периода модуляции T_{\pm} , соответствующие границам интервала неустойчивости при заданной глубине модуляции \tilde{m} и $\gamma = 0$ (в приближении $\tilde{m} \ll 1$, скажем, для $\tilde{m} = 10\%$). Как ширина интервала зависит от глубины модуляции?

(б) Найдите границы основного интервала параметрической неустойчивости с точностью до членов второго порядка по глубине модуляции \tilde{m} . Влияют ли члены второго порядка на ширину этого интервала неустойчивости?

(в) Проверьте в эксперименте рассчитанные значения T_{\pm} и начальной угловой скорости для каждой из границ интервала параметрической неустойчивости, и попытайтесь найти экспериментально более точные значения этих величин.

2.2** Колебания на границах основного интервала параметрической неустойчивости.

(а) Какие начальные условия следует задавать для того, чтобы наблюдать стационарные колебания неизменной амплитуды, соответствующие каждой из границ основного интервала параметрического резонанса? Допустим, что задано некоторое начальное отклонение $\varphi(0) = \varphi_0$. Какую начальную скорость $\Omega = \dot{\varphi}(0)$ следует затем ввести для получения стационарных колебаний?

(б) На основе графиков стационарных колебаний в условиях границ интервала неустойчивости, наблюдаемых при моделировании, объясните физические причины постоянства амплитуды (т. е. причины, по которым не происходит систематического подвода или отвода энергии) для каждой из границ интервала.

(в) Для стационарных колебаний на границах интервала неустойчивости, чему равно отношение амплитуды третьей гармоники к амплитуде гармонической составляющей на фундаментальной частоте? Какими параметрами системы определяется вклад третьей гармоники? Чем различаются вклады третьей гармоники для колебаний в условиях левой и правой границ интервала?

2.3** Порог параметрического резонанса в пределах интервала неустойчивости.

(а) Допустим, что значение периода модуляции T лежит где-либо внутри интервала параметрического возбуждения, например, посередине между резонансным значением периода модуляции и одной из границ интервала. Оцените экспериментально показатель роста амплитуды колебаний в отсутствие трения, и рассчитайте на основе этой оценки пороговое значение добротности Q_{\min} параметрического возбуждения колебаний для данных значений периода модуляции T и глубины модуляции \tilde{m} .

(б) Проверьте полученное значение Q_{\min} в эксперименте, и методом проб и ошибок получите уточненное значение. Сравните наблюдаемые графики (пример можно видеть на рис. 1.1) и фазовые траектории таких стационарных колебаний с соответствующими графиками стационарных колебаний на ближней границе интервала в отсутствие трения, а также с графиками стационарных колебаний при точной настройке на резонанс с пороговым трением. В чем сходство и различия в этих графиках, и как это можно объяснить физически?

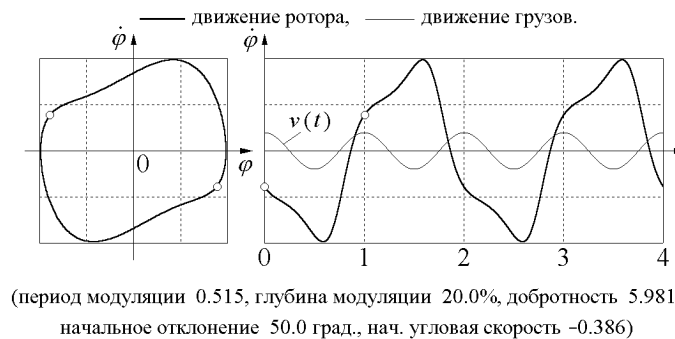


Рис. 1.1: Фазовая траектория и график угловой скорости стационарных колебаний в условиях порога для внутренней точки основного интервала параметрического резонанса ($n = 1$).

(в) Как влияет трение на ширину основного интервала параметрического резонанса? Приведите теоретическую оценку значений периода модуляции, соответствующих границам интервала при заданных значениях \tilde{m} и Q .

(г) Для случая малой глубины модуляции $\tilde{m} \ll 1$ рассчитайте пороговую добротность при некотором значении периода модуляции T из внутренней точки интервала параметрического резонанса (выполните расчет с точностью до членов второго порядка по \tilde{m}). Сравните результат расчета с экспериментальным значением пороговой добротности, полученным при ответе на вопрос пункта (б).

1.2.3 Параметрический резонанс второго порядка

3.1** Второй параметрический резонанс ($n = 2$) в отсутствие трения.

(а) Рассчитайте частотные границы второго интервала параметрической неустойчивости (когда период модуляции T близок к частоте собственных колебаний T_0) в отсутствие трения для малых значений глубины модуляции $\tilde{m} \ll 1$. Как ширина интервала зависит от глубины модуляции \tilde{m} ?

(б) Какие начальные условия нужно задавать, чтобы в эксперименте воспроизвести стационарные колебания для каждой из границ второго интервала? Почему каждой из границ второго интервала соответствуют две различные фазовые траектории? Для данной границы (скажем, верхней), в чем заключается отличие одной из возможных траекторий от другой?

(в) Чему равно отношение амплитуды второй гармоники к амплитуде фундаментальной синусоидальной составляющей стационарных колебаний на каждой из границ второго интервала? (Мы здесь понимаем под фундаментальной частотой частоту модуляции.)

3.2 Порог второго параметрического резонанса.**

(а) Допустим, что период модуляции соответствует точной настройке на параметрический резонанс второго порядка. Как нужно задать при этом начальные условия, чтобы получить наиболее быстрый рост амплитуды колебаний?

Обратите внимание на характерную для этого резонанса форму фазовой траектории. Используя экспериментальные графики колебаний, объясните качественно физические причины наблюдаемого роста амплитуды. Сравните эти кривые (и фазовую диаграмму) для плавной синусоидальной модуляции с соответствующими кривыми в случае скачкообразной прямоугольной модуляции, изучавшейся в предыдущей главе.

(б) При заданной глубине модуляции \tilde{m} , чему равно пороговое (минимальное) значение Q_{\min} добротности для возбуждения параметрического резонанса второго порядка? Какой период модуляции соответствует этому порогу возбуждения?

(в) При каких начальных условиях будут наблюдаться стационарные колебания неизменной амплитуды, соответствующие порогу возбуждения резонанса второго порядка?

(г) Чему равно отношение амплитуды второй гармоники к амплитуде фундаментальной синусоидальной составляющей стационарных колебаний в условиях порога резонанса второго порядка?